UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 9 **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 15; Bis S. 65 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und Section 3-1 – S. 147 in [Car16]

Übung 1.
Betrachten Sie die Parametrisierung

$$X\colon (-\pi,\pi)\times\mathbb{R},\ (u,v)\mapsto(\cos(u),\sin(u),v),$$

d.h. X ist eine Parametrisierung des Zylinders

$$Z=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2=1\}.$$

Bestimmen Sie alle Normalschnitte sowie die minimale und maximale Normalkrümmung von X in $p=X(0,0)=(1,0,0)$.

Übung 2.
(*Vergleiche Exercise 18 in Section 3-2 in [Car16]*)

Zeigen Sie: Schneidet die Fläche X_1 die Fläche X_2 längs einer regulären Kurve C, so ist die Krümmung $\kappa_C(p)$ von C in $p\in C$ gegeben durch

$$\kappa_C(p)^2\sin(\theta)^2=\kappa_{n_1}^2+\kappa_{n_2}^2-2\kappa_{n_1}\kappa_{n_2}\cos(\theta),$$

wobei κ_{n_1} und κ_{n_2} die Normalkrümmungen bei p längs der Tangente an C von X_1 bzw. X_2 sind und θ der Winkel zwischen den Normalenvektoren N_1 und N_2 von X_1 bzw. X_2 bei p ist.

(*Hinweis: Betrachten Sie das von den Vektoren $\kappa_{n_1}N_2$ und $\kappa_{n_2}N_1$ aufgespannte Dreieck.*)

Übung 3.
Seien a und r positive reelle Zahlen mit $r<a$ und definiere den Torus

$$X\colon(0,2\pi)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^3,\ (u,v)\mapsto((a+r\cos(u))\cos(v),(a+r\cos(u))\sin(v),r\sin(u)).$$

(i) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform von X.

(ii) Bestimmen Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt von X.

(iii) Skizzieren Sie die Normalschnitte von X durch den Punkt $(a,0,r)$.

Übung 4.
Seien I ein offenes Intervall, $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $w\colon I\to\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ glatt. Die Abbildung

$$X\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ (u,v)\mapsto\alpha(u)+vw(u)$$

heißt *Regelfläche*, falls X regulär ist. Die Kurve α wird dabei *Leitkurve* und die Geraden $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ v\mapsto\alpha(u)+vw(u)$ $(u\in I)$ werden die *Regelgeraden* genannt.

(bitte wenden)

(i) Unter welchen Bedingungen ist X eine reguläre parametrisierte Fläche?

(ii) Sei $u \in I$, sodass die Tangentialebene $T_{(u,v)}X$ von X in (u, v) für alle $v \in \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie, dass genau dann $T_{(u,v)}X = T_{(u,\tilde{v})}X$ für alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ gilt, wenn die Vektoren $\alpha'(u)$, $w'(u)$ und $w(u)$ linear abhängig sind.

(iii) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid (siehe Blatt 7, Aufgabe 1) eine Regelfläche ist.

(*Hinweis: Dritte binomische Formel.*)

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.