UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 9, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 15; Bis S. 65 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und Section 3-1 – S. 147 in [Car16]

Übung 1.
Betrachten Sie die Parametrisierung

$$X\colon (-\pi, \pi) \times \mathbb{R},\ (u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v),$$

d.h. X ist eine Parametrisierung des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie alle Normalschnitte sowie die minimale und maximale Normalkrümmung von X in $p = X(0, 0) = (1, 0, 0)$.

Lösung 1.
Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_1 X(u, v) &= (-\sin(u), \cos(u), 0),\\ \partial_2 X(u, v) &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

und

$$\partial_1 X(u, v) \times \partial_2 X(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

für alle $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Sei $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wir betrachten die Ebene

$$E_\theta = \{p + \lambda(\partial_1 X(0, 0) \times \partial_2 X(0, 0)) + \mu(\cos(\theta)\partial_1 X(0, 0) + \sin(\theta)\partial_2 X(0, 0))\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}n_\theta &= (\partial_1 X(0, 0) \times \partial_2 X(0, 0)) \times (\cos(\theta)\partial_1 X(0, 0) + \sin(\theta)\partial_2 X(0, 0))\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \left(\cos(\theta)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sin(\theta)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}0\\-\sin(\theta)\\\cos(\theta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

der Normalenvektor dieser Ebene und wegen

$$0 = \langle n_\theta, X(u, v) - p\rangle = -\sin(\theta)\sin(u) + \cos(\theta)v \quad ((u, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R})$$

gilt für den Normalschnitt

$$\mathrm{Bild}(X) \cap E_\theta = \{(u, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}\ ;\ \cos(\theta)v = \sin(\theta)\sin(u)\}.$$

Sei $(u, v) \in \mathrm{Bild}(X) \cap E_\theta$.

(bitte wenden)

(i) $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$: Dann gilt

$$v = \tan(\theta)\sin(u),$$

sodass

$$\alpha\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \tan(\theta)\sin(t) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung des Normalschnittes ist. Für $t \in (-\pi, \pi)$ erhalten wir

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \tan(\theta)\cos(t) \end{pmatrix},\ \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\tan(\theta)\sin(t) \end{pmatrix},\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tan(\theta) \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{(1 + \tan(\theta)^2)^{1/2}}{(1 + \tan(\theta)^2 \cos(t)^2)^{3/2}}$$

und damit

$$\kappa_\alpha(0) = \frac{1}{1 + \tan(\theta)^2} \in (0, 1].$$

(ii) $\theta = \frac{\pi}{2}$: Dann gilt

$$0 = -\sin(\theta)\sin(u) + \cos(\theta)v = -\sin(u) \iff u = 0,$$

sodass

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung des Normalschnittes ist. Für $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\kappa_\alpha(t) = 0 = \kappa_\alpha(0).$$

Die minimale und maximale Normalkrümmung von X in p ist damit 0 bzw. 1.

Übung 2.

(*Vergleiche Exercise 18 in Section 3-2 in [Car16]*)

Zeigen Sie: Schneidet die Fläche X_1 die Fläche X_2 längs einer regulären Kurve C, so ist die Krümmung $\kappa_C(p)$ von C in $p \in C$ gegeben durch

$$\kappa_C(p)^2 \sin(\theta)^2 = \kappa_{n_1}^2 + \kappa_{n_2}^2 - 2\kappa_{n_1}\kappa_{n_2}\cos(\theta),$$

wobei κ_{n_1} und κ_{n_2} die Normalkrümmungen bei p längs der Tangente an C von X_1 bzw. X_2 sind und θ der Winkel zwischen den Normalenvektoren N_1 und N_2 von X_1 bzw. X_2 bei p ist.

(*Hinweis: Betrachten Sie das von den Vektoren $\kappa_{n_1} N_2$ und $\kappa_{n_2} N_1$ aufgespannte Dreieck.*)

Lösung 2.
Wie betrachten das von $\kappa_{n_1} N_2$ und $\kappa_{n_2} N_1$ aufgespannte Dreieck. Für die dritte Seite gilt mit dem Cosinussatz
$$|\kappa_{n_1} N_2 - \kappa_{n_2} N_1|^2 = \kappa_{n_1}^2 + \kappa_{n_2}^2 - 2\cos(\theta)\kappa_{n_1}\kappa_{n_2}.$$
Mit Blatt 2, Aufgabe 1 (iii) erhalten wir
$$\begin{aligned}|\kappa_{n_1} N_2 - \kappa_{n_2} N_1| &= |\kappa_C(p)\langle n, N_1\rangle N_2 - \kappa_C(p)\langle n, N_2\rangle N_1| \\ &= \kappa_C(p)|\langle n, N_1\rangle N_2 - \langle n, N_2\rangle N_1| \\ &= \kappa_C(p)|n \times (N_1 \times N_2)| \\ &= \kappa_C(p)|N_1 \times N_2| \\ &= \kappa_C(p)|\sin(\theta)|,\end{aligned}$$
wobei wir $n \perp N_1 \times N_2 = t_C(p)$ und $|n| = |N_1| = |N_2|$ benutzt haben. Damit folgt die Behauptung.

Übung 3.
Seien a und r positive reelle Zahlen mit $r < a$ und definiere den Torus
$$X\colon (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto ((a + r\cos(u))\cos(v), (a + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u)).$$

(i) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform von X.

(ii) Bestimmen Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt von X.

(iii) Skizzieren Sie die Normalschnitte von X durch den Punkt $(a, 0, r)$.

Lösung 3.
Sei $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$.

(i) Es gilt
$$\begin{aligned}\partial_1 X(u, v) &= -r(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), -\cos(u)), \\ \partial_2 X(u, v) &= (a + r\cos(u))(-\sin(v), \cos(v), 0),\end{aligned}$$
sodass
$$\begin{aligned}|\partial_1 X(u, v)|^2 &= r^2, \\ |\partial_2 X(u, v)|^2 &= (a + r\cos(u))^2, \\ \langle \partial_1 X(u, v), \partial_2 X(u, v)\rangle &= 0.\end{aligned}$$
Hiermit folgt
$$\begin{aligned}\partial_1 X(u, v) \times \partial_2 X(u, v) &= -r(a + r\cos(u))(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u)), \\ |\partial_1 X(u, v) \times \partial_2 X(u, v)| &= r(a + r\cos(u)),\end{aligned}$$
also
$$N(u, v) = -(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u)).$$
Weiterhin gilt
$$\begin{aligned}\partial_1 N(u, v) &= (\cos(v)\sin(u), \sin(v)\sin(u), -\cos(u)), \\ \partial_2 N(u, v) &= (\sin(v)\cos(u), -\cos(v)\cos(u), 0).\end{aligned}$$
Die erste Fundamentalform lautet also
$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (a + r\cos(u))^2 \end{pmatrix}$$
und die zweite Fundamentalform ist gegeben durch
$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (a + r\cos(u))\cos(u) \end{pmatrix}.$$

(bitte wenden)

(ii) Mit (i) erhalten wir

$$\begin{aligned}
A_{(0,2\pi)\times(-\pi,\pi)}(X) &= \int_{(0,2\pi)\times(-\pi,\pi)} |\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v)| \,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_{(-\pi,\pi)} \int_{(0,2\pi)} r(a + r\cos(u)) \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= 2\pi r[au + r\sin(u)]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi^2 ra.
\end{aligned}$$

(iii) Cassinische Kurven.

Übung 4.

Seien I ein offenes Intervall, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $w\colon I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ glatt. Die Abbildung

$$X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \alpha(u) + vw(u)$$

heißt *Regelfläche*, falls X regulär ist. Die Kurve α wird dabei *Leitkurve* und die Geraden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto \alpha(u) + vw(u)$ $(u \in I)$ werden die *Regelgeraden* genannt.

(i) Unter welchen Bedingungen ist X eine reguläre parametrisierte Fläche?

(ii) Sei $u \in I$, sodass die Tangentialebene $T_{(u,v)}X$ von X in (u,v) für alle $v \in \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie, dass genau dann $T_{(u,v)}X = T_{(u,\tilde{v})}X$ für alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ gilt, wenn die Vektoren $\alpha'(u)$, $w'(u)$ und $w(u)$ linear abhängig sind.

(iii) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid (siehe Blatt 7, Aufgabe 1) eine Regelfläche ist.

(*Hinweis: Dritte binomische Formel.*)

Lösung 4.

(i) Sei $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1 X(u,v) &= \alpha'(u) + vw'(u), \\
\partial_2 X(u,v) &= w(u),
\end{aligned}$$

sodass

$$\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) = \alpha'(u) \times w(u) + vw'(u) \times w(u).$$

Damit ist X genau dann regulär, wenn $\alpha'(u) \times w(u)$ und $w'(u) \times w(u)$ für alle $u \in I$ linear unabhängig sind.

(ii) Es gelte zunächst $T_{(u,v)}X = T_{(u,\tilde{v})}X$ für alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$T_{(u,v)}X = T_{(u,0)}X = \operatorname{span}\{\alpha'(u), w(u)\}$$

für alle $v \in \mathbb{R}$, sodass

$$\partial_1 X(u,v) = \alpha'(u) + vw'(u) = \lambda\alpha'(u) + \mu w(u)$$

für alle $v \in \mathbb{R}$. Wir erhalten also

$$0 = (\lambda - 1)\alpha'(u) + \mu w(u) - vw'(u)$$

für alle $v \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha'(u), w(u), w'(u)$ linear abhängig sind.

Seien nun $\alpha'(u), w(u), w'(u)$ linear abhängig. Damit sind $\alpha'(u) \times w(u)$ und $w'(u) \times w(u)$ linear abhängig, sodass $\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v)$ und $\alpha'(u) \times w(u)$ linear abhängig sind für alle $v \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$T_{(u,v)}X = \{\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v)\}^\perp = \{\alpha'(u) \times w(u)\}^\perp = T_{(u,\tilde{v})}X$$

für alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$.

(bitte wenden)

(iii) Das hyperbolische Paraboloid haben wir durch

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)$$

parametrisiert. Da

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = \left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)\left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b}\right)$$

für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt, können wir mit der linearen Bijektion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto \left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b}, \frac{u}{a} + \frac{v}{b}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung schreiben als

$$\begin{aligned} X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) &\mapsto (\varphi^{-1}(\varphi(u,v)), \varphi_1(u,v)\varphi_2(u,v)) \\ &= \left(\frac{a}{2}(\varphi_1(u,v) + \varphi_2(u,v)), \frac{b}{2}(\varphi_2(u,v) - \varphi_1(u,v)), \varphi_1(u,v)\varphi_2(u,v)\right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\tilde{X}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (\tilde{u},\tilde{v}) \mapsto \left(\frac{a}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{b}{2}(\tilde{v}-\tilde{u}), \tilde{u}\tilde{v}\right) = \left(\frac{a}{2}\tilde{u}, -\frac{b}{2}\tilde{u}, 0\right) + \tilde{v}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \tilde{u}\right),$$

da

$$\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (\tilde{u},\tilde{v}) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{b}{2}(\tilde{v}-\tilde{u})\right).$$

Mit

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(\frac{a}{2}t, -\frac{b}{2}t, 0\right) \quad \text{und} \quad w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ t \mapsto \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$$

folgt dann

$$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = \alpha(\tilde{u}) + vw(\tilde{u})$$

für alle $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \mathbb{R}^2$.

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.