Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 1
Abgabe: Montag, den 19.04.2021.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Ober-und Untersummen den Wert des Integrals

$$\int_0^2 \exp(\alpha x)dx,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

(a) Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

existiert. Zeigen Sie, dass dann das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$ existiert und dass

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

gilt.
(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\int_\delta^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta a}^{\delta b} \frac{f(x)}{x} dx$$

für alle $\delta > 0$ gilt.)

(b) Zeigen Sie für $t > 0$

$$\ln(t) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\cos(x) - \cos(tx)}{x} dx.$$

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$$

existiert und berechnen Sie seinen Wert.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cos(x)dx$$

existiert.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(x) := \int_0^x (x-t)g(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Existiert $f''(x)$? Versuchen Sie gegebenenfalls $f''(x)$ zu bestimmen.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $[a,b] = I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

Abgabe: MONTAG, der 19.04.2021 bis 12 Uhr.