**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

**Analysis II (SS 2021)**
**Übungsblatt 11**
Abgabe: Freitag, den 02.07.2021.

---

## Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir setzen:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

wobei $A^k$ das $k$-fache Matrizenprodukt bezeichnet. Wählen wir $||A|| := \sup\limits_{|v| \leq 1} |Av|$, so ist $||A^k|| \leq ||A||^k$, woraus die Konvergenz der Reihe folgt.
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $D = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Diagonalmatrix, so gilt $e^D = D(e^{\alpha_1} \dots e^{\alpha_n})$.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$.

(c) $AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(d) Ist $S$ regulär, so folgt: $S e^A S^{-1} = e^{SAS^{-1}}$.

(e) Ist $A$ diagonalisierbar, so ist $e^A$ auch diagonalisierbar.

(f) Die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$ ist differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA}.$$

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Lösen Sie folgendes lineares System mit variablen Koeffizienten:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ und $y \in C^n(I, \mathbb{R})$. Wir betrachten

(1) homogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x)$

(2) inhomogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + b(x).$

Beweisen Sie folgenden Aussagen:

(a) Sei $H := \{\varphi \in C^n(I, \mathbb{R}) : \varphi \text{ löst } (1)\}$. Dann ist $\dim H = n$, d.h. es gibt $n$ linear unabhängige Lösungen von (1) und $m > n$ Lösungen sind stets voneinander abhängig. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für ein $x \in I$ (alle $x \in I$) gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \ldots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

(b) Sei $\psi_0$ eine spezielle Lösung von (2). Dann gilt:

$$\text{Lösungsmenge von } (2) = \psi_0 + H.$$

**Aufgabe 4 (8+4=12 Punkte)**

**(i)** Verwenden Sie den Potenzreihenansatz und leiten Sie Lösungsformeln der folgenden Differentialgleichungen her:

a) $\left(1 - x^2\right)\, y''(x) - 2x\, y'(x) + n(n+1)\, y(x) = 0$ für $x \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $y''(x) - 2\,x\; y'(x) + 2\,ny(x) = 0$ für $x \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

**(ii)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y''(x) + 2ay'(x) + by(x) = 0.$$