Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 12
Abgabe: Freitag, den 09.07.2021.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \int_0^{xy} f(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass g stetig partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen von g.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$ existieren und berechnen Sie diese. Ist f stetig in $(0, 0)$?

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y & ; \quad x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 1 & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g partiell differenzierbar in $(0, 0)$ ist, die Richtungsableitung von g im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ jedoch nicht existiert.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existieren, aber verschiedene Werte haben. Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir nennen eine reelle Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homogen vom Grad α ($\alpha > 0$), falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle reelle und positive t gilt:

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie, dass die folgende Äquivalenz

$$f \text{ ist homogen vom Grad } \alpha \iff \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen wieder konvex ist.

(b) Sei Ω eine offene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Besitzt $f \in C^1(\Omega)$ in Ω beschränkte partielle Ableitungen, so ist f Lipschitz-stetig in Ω.