Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 13

Abgabe: Freitag, den 16.07.2021.

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen. Beweisen Sie die Gültigkeit von $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

(b) Beweisen Sie $\Delta |x|^{2-n} = 0$ auf $\mathbb{R}^n - \{0\}, n \geq 3$ und $\Delta \log(|x|) = 0$ auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf partielle und totale Differenzierbarkeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = |x - y|y$.

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobimatrizen und deren Determinante der folgenden Abbildungen in jedem Punkt des jeweiligen Definitionsbereiches:

(a) $h : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))$.

(b) $k : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, z) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung in allen Punkten, in denen sie existieren.

(b) Untersuchen Sie f auf totale Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es eine differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x, y) = \varphi(x + y)$.