Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 14
Abgabe: Freitag, den 23.07.2021.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie: Ist f stetig in x_0 und ist g total differenzierbar in x_0 mit $g(x_0) = 0$, so ist $fg : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x_0 mit

$$D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) = c$. Zeigen Sie, dass der Gradient $\nabla f(x)$ auf der Niveaufläche
$N_f(c) := \{y \in U; f(y) = c\}$ senkrecht steht, d.h. es gilt Folgendes:
Für jede stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0, \varphi(0) = x$ und $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset N_f(c)$ gilt

$$\varphi'(0) \cdot \nabla f(x) = 0.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie: Ist U konvex und gilt

$$\sup\{||J_f(x)||; x \in U\} < \infty,$$

so ist f schon gleichmäßig stetig auf U. (Hierbei bezeichnet $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von f im Punkt $x \in U$.)