Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 2
Abgabe: Freitag, den 23.04.2021.

Aufgabe 1 (3+3+3+3=12 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz ($n \in \mathbb{N}$):

(a) $f_n : [0, 2021] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sin(\frac{x}{n})$.

(b) $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) := nx(1 - x^2)^n$.

(c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) := \max\{0, n - n^2|x - \frac{1}{n}|\}$

(d) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}(1 - x^2)^n$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{x}{n^2} \exp(\frac{-x}{n}), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f_n auf $[0, \infty)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Folgt daraus $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ und punktweise gegen $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Ist dann $f = g$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Sei die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$h_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$$

Untersuchen Sie die Folge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Geben Sie ggf. die Grenzfunktion an und bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)dx.$$

(b) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.
Zeigen Sie: Gilt $|f_n(x)| \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a,b]$ mit einer Konstanten $K > 0$, so konvergiert die Folge $\frac{1}{f_n}$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{1}{f}$.
Zeigen Sie durch ein einfaches Gegenbeispiel, dass die Voraussetzung $f_n(x) > 0$ für diesen Schluss nicht reicht.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die zweite Ableitung der durch

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^a \sin(xy)dy$$

definierte Funktion einmal durch Differenzieren nach dem Parameter, einmal durch explizites Berechnen des Integrals und anschließendes Differenzieren. Zeigen Sie durch Vergleich beider Ausdrücke, dass

$$\int_0^a y^2 \sin(y)dy = (2-a^2)\cos(a) + 2a\sin(a) - 2.$$