Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, den 30.04.2021.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch

$$g(x) := \int_0^5 (1 + x^3 t^4)^2 dt, \quad (x \in [0,1])$$

definierte Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf $[0,1]$ monoton wachsend ist.

Aufgabe 2 (6+6=12 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Seien $f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ für jedes $x \in [a,b]$ nach t differenzierbar für alle $t \in (c,d)$ und die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t} : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist die Funktion $\varphi : (c,d) \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

nach t differenzierbar für alle $t \in (c,d)$ mit

$$\varphi'(t) := \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Es gelten die Voraussetzungen von **(i)** und es seien $g, h : (c,d) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $a \leq g(t) \leq h(t) \leq b$ für alle $t \in (c,d)$.

Dann ist die Funktion $\psi : (c,d) \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(t) := \int_{g(t)}^{h(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

nach t differenzierbar für alle $t \in (c, d)$ mit

$$\psi'(t) := \int\limits_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\,\mathrm{d}x + f(h(t), t)h'(t) - f(g(t), t)g'(t)$$

für alle $t \in (c, d)$.

Aufgabe 3 (4+4+4=12 Punkte)

Wir betrachten für $x > 0$ die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Zeigen Sie die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

für alle $x > 0$.

(b) Beweisen Sie (beispielsweise mit Satz 14.6), dass Γ differenzierbar ist.

(c) Beweisen Sie für $\phi(t) := \ln(\Gamma(t))$ die Gleichung

$$\phi(t + 1) - \phi(t) = \ln(t), \quad t > 0.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung von f.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = \sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Wieweit müssen Sie $f(x)$ in eine Taylorreihe entwickeln, damit der Fehler im Intervall $[-1, 3]$ kleiner als $\frac{1}{10}$ wird?