Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 4
Abgabe: Freitag, den 07.05.2021.

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

(i) Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ eine ungerade Funktion mit $f^{(2n+1)}(x) \geq 0$ für alle $|x| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie:

$$f(x) = T_0 f(x), \quad |x| < 1.$$

(*Hinweis*:Verwenden Sie Satz 15.2).

(ii) Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ mit $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $|x| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$f(x) = T_0 f(x), \quad |x| < 1.$$

(*Hinweis*: Schreiben Sie f als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion und verwenden Sie Teil (i).)

Aufgabe 2 (6+8=14 Punkte)

(i) Sei $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k (x-x_0)^k$ konvergent auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: Die Taylorreihe von f in x_0 existiert, konvergiert gegen f, und es gilt $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$.

(ii) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + tx^2} \, \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f \notin C^\omega(-1,1)$.

(*Hinweis*: Untersuchen Sie dazu die Taylor-Reihe von f in 0.)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3}$$

auf $\mathbb{R} - \{0\}$ definierte Funktion f zu einer differenzierbaren Funktion $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann und berechnen Sie $\tilde{f}(0)$ und $\tilde{f}'(0)$.
(*Hinweis*: Die Betrachtung geeigneter Potenzreihenentwicklungen ist oft praktischer als die Benutzung der Regeln von de l'Hospital.)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion ($n \geq 1$ ungerade), x_0 ein Punkt des offenen Intervalls I und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0, \;\; f^{(n+1)}(x_0) > 0,$$

so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar über alle kompakten Teilintervalle von $\mathbb{R}$.
Beweisen Sie: Ist f 2π-periodisch, so gilt:

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

für jede Wahl von $a \in \mathbb{R}$.