Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 5
Abgabe: Freitag, den 14.05.2021.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch mit denselben Fourier-Koeffizienten. Zeigen Sie, dass dann schon $f = g$ gilt.
(*Hinweis*: Betrachten Sie die Funktion $h = f - g$ und benutzen Sie den Approximationssatz von Weierstraß im Kontext von periodischen Funktionen.)

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, quadratisch integrierbare Funktion mit den Fourier-Koeffizienten c_n, $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie die für alle $N \in \mathbb{N}$ gültige Ungleichung

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Hierbei heißt f quadratisch integierbar, wenn das Integral rechts existiert.
(*Hinweis*: Man schaue sich $\int_0^{2\pi} |f - f_N|^2 dx$ an, wobei $f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ ist.)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung von $f_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $f_1(t) = \cos^2(t)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung von $g_1 : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $g_1(t) = t^2$

(i) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_n und b_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_m, $m \in \mathbb{Z}$.

(iii) Gegen welche Funktionen konvergieren die Fourierreihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))?$$

(*Hinweis*: Sie dürfen benutzen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ e^{-x} & ; \quad -\pi \le x \le 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} -x + \frac{\pi}{2} & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ x - \frac{3}{2}\pi & ; \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

(plus 2π-periodische Fortsetzungen auf $\mathbb{R}$). Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten c_n, $n \in \mathbb{Z}$, dieser Funktion, und entscheiden Sie, ob die Fourier-Reihe konvergiert.

Aufgabe 5 (4+4+4=12 Punkte)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\mathcal{L}(f)(s) := F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie:

(i) Konvergiert $F(s_0)$ absolut für ein $s_0 \in \mathbb{R}$, so konvergiert $F(s)$ absolut für alle $s > s_0$.

(ii) Sind f und f' auf $[0, \infty)$ absolut integrierbar, so gilt

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

(iii) Bestimmen Sie $\mathcal{L}(f)$ für folgende Funktionen f und untersuchen Sie jeweils, für welche s $\mathcal{L}(f)$ konvergiert.

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = e^{\alpha t}$ $(\alpha > 0)$.

(c) $f(t) = \cos(\omega t)$ $(\omega \in \mathbb{R})$.