Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 6
Abgabe: Freitag, den 21.05.2021.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische und stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie dann eine Konstante $C \geq 0$ mit
$$|c_k| \leq \frac{C}{|k|}$$
für alle $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, wobei c_k den k-ten Fourier-Koeffizienten von f bezeichnet. Begründen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe gegen f.
(*Hinweis*: Für die Abschätzung arbeite man mit der Formel für die c_k, für den zweiten Teil darf man Satz 15.12 benutzen.)

Aufgabe 2 (3+4+3=10 Punkte)

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $g(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$. Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe von g gegeben ist durch
$$\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(b) Für $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ sei die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch $f(x) = e^{iax} - \frac{e^{2\pi ia}-1}{2\pi}x$. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f.

(c) Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert,

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass
$$\delta(x, y) := \arctan(|x - y|)$$
eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Sei $d(x, y) = |x - y|$ die übliche (mit dem Absolutbetrag gebildete) Metrik auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das System der bzgl. δ offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit dem System der bzgl. d offenen Teilmengen übereinstimmt.

Aufgabe 4 (6+6=12 Punkte)

(a) Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener und beschränkter Teilmengen von Ω gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

(*Hinweis*: Für eine beliebige Teilmenge M eines topologischen Raumes wird mit $\mathrm{int}(M)$ der offene Kern dieser Teilmenge bezeichnet.)

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Für $f \in C^0(\Omega)$ und $K \subset \Omega$ beschränkt und abgeschlossen, setze

$$||f||_K := \sup\{|f(x)|; x \in K\}.$$

Sei (K_n) eine Folge wie in Teil (a). Zeigen Sie, dass durch

$$d(f,g) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{||f-g||_{K_j}}{1+||f-g||_{K_j}} \qquad (f,g \in C^0(\Omega))$$

eine Metrik auf $C^0(\Omega)$ definiert wird.