Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 7
Abgabe: Freitag, den 28.05.2021.

Aufgabe 1 (2+2+2+2=8 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ und $a \in X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) A offen $\iff A \cap \partial A = \emptyset$.

(ii) A abgeschlossen $\iff \partial A \subset A$.

(iii) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

(i) Sei A eine nichtleere Menge. Mit $B(A)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$. $B(A)$ wird versehen mit der Supremumsmetrik

$$d_\infty(f,g) := \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|$$

zu einem metrischen Raum (dies erfordert keinen Nachweis). Zeigen Sie, dass $B(A)$ vollständig ist.

(ii) Wir versehen den Raum

$$C^0([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$$

mit der Supremumsmetrik. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{f \in C^0([0,1]) : f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$$

abgeschlossen ist und bestimmen Sie den Rand ∂A von A.

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Jede vollständige Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist abgeschlossen.

(ii) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge A von X vollständig.

Aufgabe 4 (2+6=8 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die euklidische Norm und Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ zueinander äquivalent sind.

(ii) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem zwei Normen $||.||_1$ und $||.||_2$ **definiert** sind. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Normen $||.||_1$ und $||.||_2$ sind äquivalent.

(b) Eine Menge $U \subset V$ ist genau dann offen bezüglich $||.||_1$, wenn sie offen bezüglich $||.||_2$ ist.

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

Sei $\mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $(M \times N)$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Durch

$$||A|| := \sup\{|Ax| : x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 1\} \qquad (A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R}))$$

(wobei $|.|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$ bezeichnet) wird eine Norm auf $\mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ definiert. Sind $A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{N\times R}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||.$$

(ii) Durch

$$||A||_2 := \Bigg(\sum_{\substack{i=1,\dots,M\\ j=1,\dots,N}} a_{ij}^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \qquad (A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R}))$$

wird eine Norm auf $\mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ definiert. Sind $A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{N\times R}(\mathbb{R})$, dann gilt $||AB||_2 \leq ||A||_2 \cdot ||B||_2$. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$||A|| \leq ||A||_2 \leq \sqrt{N}||A||$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ gilt.