Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 8
Abgabe: Freitag, den 11.06.2021.

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und seien $f_n, f : K \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen mit

a) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in K$;

b) $f_n \longrightarrow f$ punktweise auf K für $n \to \infty$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für $\varepsilon > 0$ ist die Familie $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ mit
$$U_n := \{x \in K : f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
eine offene Überdeckung von K.

(ii) $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf K für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3=12 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine nichtleere Teilmenge von X, so definieren wir die Abstandsfunktion $d_M : X \to \mathbb{R}$ durch
$$d_M(x) := \inf\{d(x, y) : y \in M\}$$
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $x, y \in X$ gilt
$$|d_M(x) - d_M(y)| \leq d(x, y)$$
und d_M ist stetig.

(ii) $\overline{M} = \{x \in X : d_M(x) = 0\}$

(iii) $U_\varepsilon(M) := \{x \in X : d_M(x) < \varepsilon\}$ ist offen und $\overline{U_\varepsilon}(M) := \{x \in X : d_M(x) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

(iv) Ist $U \subset X$ offen und $K \subset U$ kompakt, so gibt es eine offene Menge V mit
$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Aufgabe 3 (3+3=6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^n - K$. Zeigen Sie:

(i) f nimmt auf $\mathbb{R}^n$ ein globales Minimum oder ein globales Maximum an.

(ii) f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 4 (3+3=6 Punkte)

Seien (X_i, d_i) für $i = 1, 2, 3$ metrische Räume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind $g : X_1 \to X_2$ und $f : X_2 \to X_3$ stetig, so ist auch $f \circ g : X_1 \to X_3$ stetig.

(ii) Ist (X_1, d_1) kompakt und $f : (X_1, d_1) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f auf X_1 beschränkt und es gibt $x_1, x_2 \in X_1$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

für alle $x \in X_1$.

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ schon gleichmäßig stetig ist.

(ii) Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine abzählbare Teilmenge $Y \subset K$ existiert, so dass $\overline{Y} = K$.