Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis II (SS 2021)
Übungsblatt 9

Abgabe: Freitag, den 18.06.2021.

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

Sei $a > 0$. Begründen Sie, dass die folgenden Kurven f, g rektifizierbar sind und berechnen Sie die Bogenlänge:

(a) $f : [\frac{1}{2}, 3] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sqrt{t}, \sqrt{3t})$.

(b) $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Für $c \in (a, b)$ seien $f_c : [a, c] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t)$ und $g_c : [c, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t)$. Zeigen Sie:

(i) Die Kurven f_c und g_c sind rektifizierbar und es gilt $L(f) = L(f_c) + L(g_c)$.

(ii) Es ist $\lim\limits_{c \uparrow b} L(f_c) = L(f)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \begin{cases} (t, t\cos(\frac{\pi}{t})) & ; \quad 0 < t \leq 1 \\ (0, 0) & ; \quad t = 0 \end{cases}$$

eine Kurve definiert wird, welche nicht rektifizierbar ist.
(*Hinweis*: Betrachten Sie eine geeignete Zerlegung von $[0, 1]$.)

Aufgabe 4 (2+6=8 Punkte)

Seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ und sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) eine rektifizierbare Kurve mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$, die auf keinem Teilintervall von $[a, b]$ positiver Länge konstant ist. Zeigen Sie:

(i) $L(\gamma) \geq |p - q|$.

(ii) Ist $L(\gamma) = |p - q|$, so existiert eine stetige, bijektive Abbildung $\delta : [a, b] \to [0, 1]$ so, dass

$$\gamma(t) = p + \delta(t)(q - p)$$

für alle $t \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$. Betrachten Sie die durch

$$\gamma(s) := \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

erklärte parametrisierte Kurve.

(a) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von γ.

(b) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein der Kurve.

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Zeigen Sie, das die Torsion τ von α genau dann identisch verschwindet, wenn die Spur von α Teilmenge einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ ist.