§15

Entwicklung nach speziellen Funktionen: Taylor- und Fourier-Reihen

Wir diskutieren folgendes Probelm: gegeben ist eine Funktion f; gesucht wird eine Entwicklung $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ nach möglichst einfach zu bestimmenden Funktionen f_n, so dass f durch $\sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ "gut" genähert wird.

Wir beginnen mit $\boxed{\text{Taylor-Reihen}}$ und erinnern dazu an bekannte Begriffe:

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f \in C^\infty(I)$, $a \in I$;

$$T_a f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

heißt Taylorreihe von f mit Entwicklungsmitte a.

Diese formale Potenzreihe konvergiert stets auf einem Intervall um a, wobei für den Konvergenzradius R die Fälle $R = 0$, $R \in (0, \infty)$, $R = \infty$ möglich sind. Wir geben zwei Beispiele für schlechtes Verhalten:

a) Die Taylorreihe $T_a f$ kann auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren, ohne dass sie die Funktion darstellt.

Beispiel:

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{l} 0,\ x = 0 \\ e^{-1/|x|},\ x \neq 0 \end{array} \right\} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

mit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle k, also $T_0 f \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$.

b) Die Taylorreihe $T_a f$ konvergiert nur für $x = a$.

Beispiel: (Übung) $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(n^2 x)$

Es gilt

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}, \quad \left|2^{-n} \cos(n^2 x)\right| \leq 2^{-n} \implies$$

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \cdot \cos(n^2 \bullet) \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} f \text{ auf } \mathbb{R} \quad \underset{\text{Korollar zu 13.1}}{\implies}$$

f stetig auf $\mathbb{R}$; analog für die Ableitungen $\implies f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Beachte nun $f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad |f^{(2k)}(0)| > \frac{n^{4k}}{2^n} \quad \forall\, n.$

Für $x \neq 0$: $\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}\right| > \frac{(n^2|x|)^{2k}}{(2k)!\ 2^n} \quad \forall\, n.$

Wähle $n = 2k \implies \left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}\right| > (k|x|)^{2k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$

d.h.: die Glieder der Taylorreihe bilden keine Nullfolge!

$\square$

Ob und wie gut das Taylorpolynom $T_{n,a}f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ die Funktion approximiert, entscheidet das

Restglied: $R_n(x) := R_{n,a}f(x) := f(x) - T_{n,a}f(x).$

In ï¿½11 haben wir abgeleitet

Restglieddarstellung von Lagrange:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \cdot (x-a)^{n+1}}$$

mit einer Zwischenstelle c zwischen x und a.

Beispiel: $f(x) = \ln(1+x),\ x > -1.\ (a = 0)$

$$x > 0: \quad R_n(x) = \tfrac{1}{(n+1)!}\,(-1)^{n+2}\,n!\ \ (1+c)^{-n-1}\ x^{n+1}$$

$$= \tfrac{1}{n+1}\left(\tfrac{1}{1+c}\right)^{n+1}(-1)^{n+2}\cdot x^{n+1}$$

mit $c \in (0, x)$. Also:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}$$

Es gilt: $R_n(x) \longrightarrow 0$, falls $\tfrac{x}{1+c} \le 1$,

und da c sehr nahe bei 0 liegen kann, folgt $R_n(x) \longrightarrow 0$ sicher für $0 \le x \le 1$. Wir haben die Taylorentwicklung

$$* \quad \left|\begin{array}{l} \ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k}\,(-1)^{k+1}\,x^k, \\ \\ 0 \le x \le 1. \end{array}\right.$$

$x < 0$: analog gilt

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{|x|}{|1+c|}\right)^{n+1}$$

mit $c \in (x, 0)$. (Natürlich ist $x > -1$.) Es ist

$$\frac{|x|}{|1+c|} = \frac{|x|}{1-|c|} \le \frac{|x|}{1-|x|} \le 1,$$

falls $|x| \le \tfrac{1}{2}$, so dass auch $R_n(x) \longrightarrow 0$ für $-\tfrac{1}{2} \le x \le 0$.

M.a.W.: $*$ gilt auch für $-\tfrac{1}{2} \le x \le 0$.

Allerdings ist mit Lagrange keine Entscheidung möglich, ob

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,(-1)^{k-1}\,x^k$$

für $x \in (-1,1]$ gilt. Die Potenzreihe rechts konvergiert ja genau auf diesem Bereich, so dass man die Gültigkeit der Formel auch dort erwarten wird. Wie die Gegenbeispiele zeigen, kann man aber aus der Konvergenz der Potenzreihe noch nicht schließen, dass sie $\ln(1+x)$ darstellt. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir andere Restgliedformeln ableiten.

Zur Erinnerung: Zur Herleitung von Lagrange wurde definiert

$$g(y) \;:=\; f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y)(x-y)^k, \; y \in I.$$

$$\Longrightarrow \; g(a) \;=\; R_n(x), \;\; g(x) \;=\; 0, \;\; g'(y) \;=\; -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n$$

Man wählt eine beliebige, streng monotone, differenzierbare Funktion h mit

$h'(y) \neq 0 \quad \underset{\text{MWS}}{\overset{2^{te}}{\Longrightarrow}} \quad \exists\, \eta$ zwischen a und x mit

$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(\eta)}{h'(\eta)}$, also

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\eta) \frac{h(x)-h(a)}{h'(\eta)} (x-\eta)^n$$

(**Bem.**: die Vor. an h müssen nur gelten auf $[a,x]$ bzw. $[x,a]$)

Man spezialisiert $h(y) \;:=\; (x-y)^m, \; m > 0,$ also

$$h'(y) = -\,m(x-y)^{m-1},$$

und bekommt die

Restgliedformel von Schlömilch:

$$\boxed{\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!} \frac{(x-a)^m}{m(x-\eta)^{m-1}} (x-\eta)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{m \cdot n!} \frac{(x-\eta)^{n+1-m}}{(x-a)^{n+1-m}} (x-a)^{n+1} \end{aligned}},$$

$\eta = \eta\,(f,x,a,m,n)$ zwischen x und a.

$m = n+1 \quad \Longrightarrow \quad$ Restgliedformel von Lagrange

$m = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Restgliedformel von Cauchy

$$\boxed{R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!} \left(\frac{x-\eta}{x-a} \right)^n (x-a)^{n+1}} \quad .$$

Mit Cauchy wollen wir $f(x) = \ln(1+x)$ auf $(-1,0]$ diskutieren:

$$f^{(n+1)}(\eta) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\eta)^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{(1+\eta)^{n+1}} \left(\frac{x-\eta}{x} \right)^n x^{n+1}$$

Für $x \in (-1,0)$ liegt η in $(x,0)$. Wir schreiben

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{1+\eta} x^{n+1} \left\{ \frac{1}{1+\eta} \frac{x-\eta}{x} \right\}^n$$

mit $\quad 0 < \frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{x-\eta}{x} = \frac{\eta-x}{-x} \cdot \frac{1}{1+\eta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechnung}}}{<} 1,$

also

$$|R_n(x)| = \frac{1}{1+\eta} |x|^{n+1} \cdot \left\{ \dots \right\}^n \leq \frac{1}{1+x} |x|^{n+1},$$

und wegen $x > -1$ geht die rechte Seite gegen 0 bei $n \longrightarrow \infty$.

Ergebnis:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(1+x) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} x^k, \\[2ex] -1 < x \leq 1. \end{array}} \quad ,$$

Weitreichende Konsequenzen hat die

Integraldarstellung des Restglieds

$$\boxed{R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x y \, (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t) \, dt} \quad ,$$

die man induktiv beweist. $\quad (\rightarrow$ Übung)

Zunächst ist ja nach dem Hauptsatz $(n = 0)$

$$R_\circ(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ dt.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \\ &= \int_a^x f'(t)\ dt - \Big\{ f'(a)(t-a) \Big\}\Big|_a^x \end{aligned}$$

und

$$\int_a^x (x-t) f''(t)\ dt = \int_a^x \frac{d}{dt} \Big\{ (x-t) \cdot f'(t) \Big\}\ dt + \int_a^x f'(t)\ dt$$

Zusammen: $\quad R_1(x) = \int_a^x (x-t) \cdot f''(t)\ dt$, usw. $\square$

Definition 15.1 *: Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$.*

f heißt <u>reell analytisch auf I</u> $:\Longleftrightarrow$ zu jedem $x_\circ \in I$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon)$ konvergente Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\ (x - x_\circ)^k$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ (x - x_\circ)^k \ \text{auf}\ (x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon).$$

Bemerkungen:

1) Schrittweise Anwendung von Satz 13.3 auf die Potenzreihe liefert:

$$f \in C^\infty(x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon) \implies f \in C^\infty(I).$$

2) Identitätssatz für Potenzreihen $\implies a_k = \frac{1}{k!}\ f^{(k)}(x_\circ)$

[$\to$ <u>Ügung</u>: konvergiert $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_\circ)^k$ auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon)$, so ist Taylorentwicklung mit Entwicklungsmitte $x_\circ$ auf diesem Intervall konvergent und somit $a_k = \frac{1}{k!}\ f^{(k)}(x_\circ)$]

3) Man kann Def. 15.1 auch so umschreiben:

$$f \ \underline{\text{reell analytische auf } I} \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{zu jedem } x_\circ \in I \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0, \text{ so dass} \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_\circ)\ (x - x_\circ)^k \text{ auf } (x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon) \\ \text{gegeben } f \text{ konvergiert.} \end{array} \right.$$

Für die Darstellbarkeit von f durch Taylorreihen ist das Verhalten des Restglieds entscheidend, und wie wir bei $x \mapsto \ln(1+x)$ gesehen haben, ist es gar nicht so klar, für welche Form des Restglieds man sich bei konkreten Anwendungen entscheidet. Man wünscht sich daher Bedingungen, die in der Praxis leicht nachzuprüfen sind. Wir geben einige Beispiele, die alle mehr oder weniger an das Vorzeichen von Ableitungen in der Entwicklungsmitte geknüpft sind.

Satz 15.1 *:* *(<u>Bernstein</u>)*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^\infty(I)$ habe die Eigenschaft $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ und alle genügend großen n. Dann ist f reell-analytische auf I.

Zur Vorbereitung dient

Satz 15.2 *:* *Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ eine gerade Funktion mit*

$f^{(2n)}(x) \geq 0$ für alle $|x| \leq 1$ und n groß genug.

Dann ist $f(x) = T_\circ f(x)$ für $|x| < 1$.

Beweis von 15.2: f gerade $\Longleftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$, so dass

$f^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_\circ$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{-h}\Big(f(-h) - f(0)\Big)}_{\underset{h\,\to\,0}{\longrightarrow}\ f'(0)} \quad = \quad - \underbrace{\frac{1}{h}\Big(f(h) - f(0)\Big)}_{\underset{h\,\to\,0}{\longrightarrow}\ f'(0)}, \quad \text{weiter mit Induktion} \right)$$

Schreibe $\quad f(x) \;=\; \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\, f^{(2k)}(0)\; x^{2k}}_{=\, T_{2n,0}\, f(x)\,!} \;+ R_{2n}(x)$

mit

$$R_{2n}(x) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^x (x-t)^{2n}\; f^{(2n+1)}\,(t)\; dt$$

Fall $x > 0$: Variable $t \in [0,x]$ hat die Form $t = s \cdot x$ mit $0 \le s \le 1$; $f^{(2n+2)} \ge 0 \implies f^{(2n+1)}$ monoton wachsend, also $f^{(2n+1)}(t) \;\le\; f^{(2n+1)}\,(s)$, da $x \le 1$ und somit $t = sx \le s$

$$\begin{aligned}
\implies \quad R_{2n}(x) \quad & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Variablentransf.} \\ t=sx}}{=} \quad \tfrac{1}{(2n)!} \int_0^1 x \cdot (x - x \cdot s)^{2n}\; f^{(2n+1)}(sx)\; ds \\
& = \quad \tfrac{1}{(2n)!}\; x^{2n+1} \int_0^1 (1-s)^{2n}\; f^{(2n+1)}\;(sx)\; dx \\
& \underset{\text{s.o.}}{\le} \quad \tfrac{1}{(2n)!}\; x^{2n+1} \int_0^1 (1-s)^{2n}\; f^{(2n+1)}\;(s)\; ds \\
& = \quad x^{2n+1}\; R_{2n}\;(1),
\end{aligned}$$

d.h.: $\quad R_{2n}(x) \le x^{2n+1}\; R_{2n}(1).$

Andererseits:

$$f(1) \;=\; \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\;(1-0)^k}_{\ge 0} \;+ R_{2n}(1) \;\ge\; R_{2n}(1),$$

so dass

$$R_{2n}(x) \;\le\; x^{2n+1} \cdot f(1)$$

Wie verhält es sich mit dem Vorzeichen von $R_{2n}(x)$?

Wegen $f^{(2n+1)}(0) = 0$ ist

$$R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x) \underset{\text{Integralformel für } R_{2n+1}}{=} \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \underbrace{f^{(2n+2)}(t)}_{\geq 0}\, dt$$

so dass $R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x) \geq 0$ auf $[0,1]$. Das ergibt

$$0 \leq R_{2n}(x) \leq f(1)\; x^{2n+1},\; 0 \leq x \leq 1,$$

mithin $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$.

Fall $x < 0$: analog!

Zusammen folgt: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{2n,0}\, f(x),\; |x| < 1.$ □

KOROLLAR 1: Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ ungerade mit $f^{(2n+1)}(x) \geq 0$ für alle $|x| \leq 1,\; n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$f(x) = T_\circ f(x),\; |x| < 1$$

Beweis: Details → <u>Übung</u>!

$g(x) := f'(x)$ ist gerade, $g^{(2n)}(x) \geq 0 \underset{15.2}{\Longrightarrow} g(x) = T_\circ g(x),\; |x| < 1.$

Nun integriere links und rechts; die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe gestattet die Vertauschung. □

KOROLLAR 2 (Bernstein auf $(-1,1)$)
Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ mit $f^{(n)}(x) \geq 0$ für alle $|x| \leq 1$ und alle n groß genug. Dann gilt $f(x) = T_\circ f(x),\; |x| < 1$.

Beweis: → Details als <u>Übung</u>

zerlege $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big)$

und wende den Satz und das Korollar geeignet an. □

Beweis von 15.1: (Bernstein) Sei $a \in I$; man wählt $\varepsilon > 0$ mit $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset I$ und setzt $h(z) := \varepsilon \cdot z + a$, $|z| \leq 1$. h bildet $[-1,1]$ auf $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ ab, folglich ist $F := f \circ h \in C^\infty([-1,1])$ mit $F'(z) = f'(h(z)) \cdot \varepsilon, \ldots, F^{(k)}(z) = \varepsilon^k f^{(k)}(\varepsilon z + a) \geq 0$.
Korollar 2 ergibt $F = T_\circ F$ für $|z| < 1$, daraus folgt sofort $f = T_a f$ auf $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Da $a \in I$ beliebig war, ist alles bewiesen. □

Bem.: Sei $f \in C^\infty(a-r, a+r)$ mit

$$* \quad f^{(n)}(x) \geq -c^n$$

für eine Konstante $c \geq 1$. Dann setzt man

$$g(x) := f(x) + K \cdot e^{c \cdot (x-a)}$$

mit $K > 0$ so groß, dass

$$K \cdot e^{c \cdot (x-a)} \geq 1 \text{ auf } [a-r, a+r].$$

Es folgt

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + K \cdot c^n \; e^{c \cdot (x-a)} \geq f^{(n)}(x) + c^n \underset{*}{\geq} 0,$$

also funktioniert Korollar 2 für g auf $(a-r, a+r)$, d.h.

$$g = T_a \; g \text{ auf } (a-r, a+r).$$

Das ergibt sofort $f = T_a \; f$ dort, d.h. die Vorzeichenbedingung an $f^{(n)}$ kann abgeschwächt werden zu einer einseitigen Bedingung vom Typ $*$.

Zum Abschluß unserer Diskussion der Taylorreihenentwicklung beschreiben wir das

<u>Konvergenzverhalten am Rand</u>:

Sei etwa $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \; (x-a)^k$ konvergent auf $(a-r, a+r)$ für ein $r \in (0, \infty)$.

Satz 15.3 : *(Abel'scher Grenzwertsatz)*

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ *auch noch konvergent im Randpunkt* $x = a+r$. *Dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf* $[a, a+r]$, *ist also insbesondere auf* $[a, a+r]$ *stetig, d.h.:* $\lim\limits_{x \uparrow a+r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$.

Bemerkungen:

1) analoge Aussage für $a - r$, falls dort Konvergenz vorliegt
2) natürlich kann man in der Situation des Satzes nichts darüber sagen, was im anderen Randpunkt vorliegt $\left(\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1] \right)$.

15.3 folgt aus dem

LEMMA (von Abel über partielle Summation): (vgl. Satz 7.4)

Sei $I \in \mathbb{R}$; die Funktionen $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ haben die folgenden Eigenschaften:

a) $\{f_n(x)\}$ ist monoton fallend für jedes $x \in I$

b) $\exists\, M \geq 0 : \quad \|f_n\| \leq M$ für alle n

c) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ ist auf I gleichmäßig konvergent

Dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n$ gleichmäßig auf I.

Beweis: Sei $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$; für $m > n$ gilt die partielle Summationsformel

$$\sum_{k=n+1}^{m} g_k\, f_k = \sum_{k=1}^{m-1} (g_k - g)(f_k - f_{k+1}) + (g_m - g) f_m - (g_n - g) f_n.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dazu gibt es ein N mit

$\|g_k - g\| \leq \varepsilon \quad \forall\, k \geq N$

Für $m > n > N$ und alle $x \in I$

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} \Big(f_k\ g_k\Big)(x) \Big| \ \le\ \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} \Big(f_k(x) - f_{k+1}(x)\Big) + 2\,\varepsilon M$$

$$= \ \varepsilon \cdot \Big(f_n(x) - f_m(x)\Big) + 2\,\varepsilon M \ \le 4 \cdot \varepsilon M.$$

Nach dem Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz (Bem. nach Def. 13.1) folgt die Behauptung. □

Beweis von 15.3: O.E. sei $a = 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent auf $(-r, r]$. Wir setzen

$$I = [0, r],\ f_n(x) \ := \Big(\frac{x}{r}\Big)^n,\ g_n(x) = a_n r^n,\ x \in I.$$

Dann ist auf I $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x),\ |f_n(x)| \le 1$. Da die g_n konstante Funktionen sind, ist Forderung c) des Lemmas klar. Das Lemma liefert sodann: $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k = \sum_{k=0}^{N} f_k(x) g_k(x) \ \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auf $I = [0, r]$. □

Beispiele:

1) $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\ x^k$ gilt auf $(-1, 1)$.

   Die Reihe rechts konvergiert für $x = 1$, d.h.: $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\ \frac{1}{k}\ x^k$ ist stetig auf $(-1, 1]$. Also gilt die letzte Gleichung auch für $x = 1$, so dass $\boxed{\ln 2 \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\ \frac{1}{k}}$ nochmal anders bewiesen ist.

2) Arcus-Tangens Reihe: Es gilt

$$\boxed{\arctan x \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad -1 \le x \le 1}$$

Beweis: Sei $|x| < 1$. $\Longrightarrow$ $\arctan x \ = \ \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \ =$

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, t^{2k} \, dt \underset{\left(\substack{\text{Satz 13.2 } t \to \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \\ \text{glm. kvgnt für } t \in [-|x|,|x|]}\right)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Nach Leibniz konvergiert die Reihe rechts auch in ± 1, nach 15.3 ist $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ stetig auf $[-1,1]$. Da auch arctan auf $[-1,1]$ stetig ist und $f = \arctan$ auf $(-1,1)$ gilt, folgt die Behauptung. □

Wir wissen:

- (per Definition): Reell analytische Funktionen besitzen lokale Taylorreihenentwicklungen, sind also speziell C^∞
- Es gibt C^∞ - Funktionen, die man nicht lokal in Form von Konvergenten Potenzreihen darstellen kann.

Dies erweckt den Eindruck, dass C^∞ - Funktionen "schlechter" sind als reell-analytische. Dieser Eindruck ist vom Standpunkt der Regularität richtig, andererseits sind <u>reell-analytische Funktionen unflexibel</u>. Man kann zeigen:

($\to$ <u>Übungen</u>)

a) es gibt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞ mit $f(0) > 0$ und $f(x) = 0$ für $|x| \geq 1$.

b) eine solche Funktion kann nicht reell analytisch sein.

<u>Hinweis zu b)</u>: (<u>Identitätssatz für reell analytische Funktionen</u>)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, f, g seien reell analytisch mit $f(x) = g(x)$ auf einer Menge mit Häufungspunkt in I.

<u>Dann gilt</u> $f = g$ <u>auf I</u>.

(andere Version: $a \in I,\ f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a), \quad \forall\, n \implies f = g$ auf I.)

Betrachte dazu einen H.P. $a \in I$ der Menge aller $x \in I$ mit $f(x) = g(x)$ und bilde die Taylorreihen von f und g in a. Diese sind dann gleich auf einer Folge $x_n \longrightarrow a,\ x_n \neq a$, also nach dem alten Identitätssatz gleich auf einer Umgebung von a in I, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle x aus einem Intervall um a. Sei J das größte offene Intervall $\subset I$ mit $a \in J$ und $f = g$ auf J. Hätte J einen Randpunkt b in I, so könnte man das obige Argument mit b statt a benutzen und somit J vergrößern, Wspr.! $\square$

Approximationssatz von Weierstraß:

f reell analytisch $\implies$ f kann lokal durch Polynome gleichmäßig approximiert werden,

d.h.: $T_{N,x_0}f = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} f(x)$ bei $N \to \infty$ auf einer passenden Umgebung von x_0. Tatsächlich gilt viel mehr: Alle Ableitungen von f werden gleichmäßig durch die entsprechenden Ableitungen von $T_{N,x_0}f$ bei $N \to \infty$ approximiert.

In der Praxis ist f oftmals aber nur stetig auf z.B. $[a,b]$, und wenn man jetzt f auf $[a,b]$ gleichmäßig durch Polynome approximieren will, muß man sich etwas anderes überlegen.

Satz 15.4 : *(Approximationssatz von Weierstraß)*

Sei $f \in C^0([a,b,])$ (reell- oder komplexwertig). Dann gilt es eine Folge von Polynomen P_n mit $P_n \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} f$ auf $[a,b]$.

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen lassen sich dort gleichmäßig durch Polynome approximieren.

Beweisskizze: (Steffen Skript 5.1.3, p.98)

O.E. $f \in C^\circ([0,1])$

Bernstein-Polynom: $$\boxed{P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

(gewichtetes arithmetisches Mittel der Werte $f(k/n)$ von f an den Punkten einer äquidistanten Zerlegung von $[0,1]$ in n Teilintervalle, Bernstein wurde 1912 durch Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie auf diese Polynome geführt)

Eigenschaften:

i) $f \equiv 1 \quad \Longrightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \equiv 1$

ii) $f = x \quad \Longrightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x$

iii) $f(x) = x(1-x) \quad \Longrightarrow P_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x (1-x)$

Außerdem hat man:

iv) $$\frac{1}{n} \underbrace{x(1-x)}_{\leq \frac{1}{4}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0} \quad \Longrightarrow$$

v) $0 \leq \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 1/4n$

i) - iv) rechnet man nach, v) folgt aus iv).

Sei jetzt $f \in C^\circ([0,1])$, $\varepsilon > 0$ gegeben. f ist glm. stetig, also $\exists\ \delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ |x-y| < \delta$.

Fixiere $x \in [0,1]$ und zerlege

$$A_n = \Big\{k : \quad |x - k/n| < \delta\Big\},\ B_n = \Big\{k : \quad |x - k/n| \geq \delta\Big\}$$

Sei $\quad M := \max\limits_{[0,1]} |f| \quad \Longrightarrow$

$$\Big|f(x) - f(k/n)\Big| \leq \begin{cases} \varepsilon, & k \in A_n \\ 2M, & k \in B_n \end{cases}, k = 0, \ldots, n.$$

Für $k \in B_n$ ist $\delta^{-2}\Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 \ \geq \ 1$, also

$$\Big|f(x) - f(k/n)\Big| \ \leq \ \frac{2M}{\delta^2}\ \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2.$$

Es folgt

$$\Big|f(x) - P_n(x)\Big| \ \leq \ \sum_{k=0}^{n} \ \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \ \Big| \ \binom{n}{k} \ x^k \ (1-x)^{n-k}$$

$\Big($ beachte $\quad \sum\limits_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = f(x) \quad$ nach i) $\Big)$

$$\leq \ \varepsilon \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k} \ x^k \ (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k \in B_n} \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 \ \binom{n}{k} \ x^k \ (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \ \varepsilon \ \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \ \ldots}_{=1} \ + \ \tfrac{2M}{\delta^2} \ \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \ \ldots}_{\underset{\text{v)}}{\leq} \ 1/4n}$$

$$\leq \ \varepsilon \ + \tfrac{2M}{\delta^2} \ \cdot \ \tfrac{1}{4n}.$$

Für $n \geq N$ ist $\frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} \ \leq \ \varepsilon$, also

$$\Big|f(x) - P_n(x)\Big| \leq 2 \cdot \varepsilon \quad \forall \ n \geq N,$$

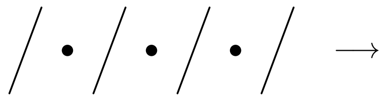
diese Abschätzung hängt nicht von x ab. $\square$

Fourier - Reihen

beschreiben die physikalische Vorstellung, dass jeder periodische Vorgang durch Überlagerung der Grundschwingungen $\sin x, \cos x$ und der Oberschwingungen $\sin(nx), \cos(nx)$ erzeugt werden kann. Das bedeutet: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine periodische Funktion, so ist es wenig zweckmäßig, f durch Polynome zu approximieren, denn diese spiegeln die Periodizität von f nur sehr unvollkommen wieder. Stattdessen wird man versuchen, (falls f 2π - periodisch ist), eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big) + a_\circ/2$$

abzuleiten. Es zeigt sich, dass dies auch für sehr wenig reguläre Funktionen f möglich ist, beispielsweise für



Definition 15.2 *:*

a) *Seien* $a_\circ, a_k, b_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$. *Dann heißt*

$$\frac{a_\circ}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big)$$

eine trigonometrische Reihe: Sie heißt konvergent (für $x \in D \subset \mathbb{R}$*), falls*

$$\frac{a_\circ}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) = f(x)$$

für $x \in D$ *existiert. (Gleichmäßige Konvergenz: analog!)*

b) *(konplexe Schreibweise) Setzt man für* $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k := \begin{cases} \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k) & , k > 0 \\ \frac{1}{2}\,a_\circ & , k = 0 \quad , \text{so ist} \\ \frac{1}{2}\,(a_{-k} + ib_{-k}) & , k < 0 \end{cases}$$

$$* \quad \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx} = \frac{a_\circ}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Sind umgekehrt für $k \in \mathbb{Z}$ *Zahlen* $c_k \in \mathbb{C}$ *vorgegeben so setzt man für* $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = c_k + c_{-k},\ b_k = i\,(c_k - c_{-k}),\ a_\circ = 2\,c_\circ$$

und bekommt $*$.
Statt trigonometrischer Reihen wie in a) zu betrachten, ist es deshalb praktischer, Reihen der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$$

zu studieren. In Übereinstimmung mit a) bedeutet diese Schreibweise die Bildung von $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}$*, sofern der Grenzwert existiert.*

Achtung: Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\ e^{ikx}$ <u>und</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{-k}\ e^{-ikx}$ existieren, so folgt daraus die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty}^{n} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k\ e^{ikx}$, <u>die Umkehrung ist falsch</u>: $c_k = 1/k$ für $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $c_\circ = 0,\ x = 0$.

Nachfolgend betrachten wir also Reihen $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx},\ x \in \mathbb{R}$, mit Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$. Es gilt:

i) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx}$ <u>punktweise konvergent</u> auf $\mathbb{R}$ gegen $f(x) \Longrightarrow f$ ist 2π-periodisch,

$f(x+2\pi) = f(x)$

ii) <u>ist die Konvergenz lokal gleichmäßig</u> (also glm. auf $[a,b]$ für alle $a < b$), so gilt:

$$\int_0^{2\pi} e^{-imx}\ f(x)\ dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{inx}\ e^{-imx}\ dx = 2\pi\ c_m$$

denn $$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{inx}\ e^{-imx}\ dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi, & n = m \end{cases}}\ .$$

“<u>Orthogonalität</u>”

Also bekommen wir die Formel

$$\boxed{c_m = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-mix}\ f(x)\ dx,\ m \in \mathbb{Z}}\ ,$$

speziell $c_\circ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ dx$ (<u>Mittelwert von f</u>) $\longrightarrow$

Satz 15.5 *Sei $c_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n| < \infty.$$

Dann ist $f(x) := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{inx}$ auf $\mathbb{R}$ definiert, <u>stetig</u>, 2π-periodisch, und es gilt

$$* \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\ dx.$$

Beweis: $\left|c_n \cdot e^{inx}\right| = |c_n|, \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \overset{\text{Majorantenkrit.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$

glm. konvergent und damit stetig, der Rest folgt wie vorhin.

□

Ergebnis: absolut summierbar c_n erzeugen die stetige Fkt. $f(x) := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$

Ziel ist die "Umkehrung von 15.5":

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch mit der Eigenschaft, dass

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \, dx < \infty$$

ist, d. h. $|f|$ ist über $[0, 2\pi]$ eigentlich oder uneigentlich integrierbar.

(Bedingung dafür: $f \in \mathcal{R}([\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$ für jedes $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \int_\alpha^1 |f(x)| \, dx$, $\lim\limits_{\beta \uparrow 2\pi} \int_1^\beta |f(x)| \, dx$ existieren)

Dann macht $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$ Sinn für alle $n \in \mathbb{Z}$, und man kann fragen:

> Werden die $c_n \in \mathbb{C}$ wie in $*$ erklärt,
>
> gilt dann $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$?

Definition 15.3 : *Unter den oben an f gemachten Voraussetzungen heißen*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

die Fourier-Koeffizienten von f, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$ wird Fourier-Reihe von f genannt.

(↑ nur formal!)

Ähnlich wie bei Taylorreihen stellen sich zwei Fragen:

- Konvergenz der Fourier-Reihe?

- und wenn ja, Konvergenz gegen f? Dazu ein Beispiel:

Bemerkung: Hätte man die Fourier-Reihe von f in der Form

$$\frac{a_\circ}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

angesetzt, so wären wegen der Reellwertigkeit von f notwendig alle Koeffizienten reell. Da f eine gerade Funktion ist, müssen die Koeffizienten b_n verschwinden. Dies läßt sich formal aus den Gleichungen für a_n, b_n und der Definition von c_n ableiten:

Schreibt man die Fourier-Reihe von f nämlich in der Form

$$\frac{a_\circ}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big),$$

so ergeben sich aus

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

die Formeln (bilde Re und Im)

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \;\; k \in \mathbb{N}_\circ, \\ b_k &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \;\; k \in \mathbb{N}. \end{aligned}}$$

und man sieht

f reell	$\Longrightarrow$	$a_k,\; b_k \in \mathbb{R}$,	
f gerade	$\Longrightarrow$	$b_k = 0$	(kein Sinus Anteil)
f ungerade	$\Longrightarrow$	$a_k = 0$	(kein Cosinus Anteil)

Nun zum

Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe:

Bis auf Widerruf nehmen wir an: Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

- $f \in \mathcal{R}\Big([0, 2\pi]\Big)$
- f wird 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Dann ist $f \in \mathcal{R}\ (\mathbb{R})$, so dass $f(x+),\ f(x-)$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ existieren.
f darf Sprungstellen haben, dh. es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\Big|f(x+) - f(x-)\Big| > 0.$$

Man überlegt sich leicht (→ Übung), dass es höchstens abzählbar viele Sprungstellen geben kann. Wir verlangen weiter

! $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) \text{ in Sprungstellen}}$ (und damit auf $\mathbb{R}$)

ist dies nicht der Fall, so ändert man f an diesen Stellen ab **!**

Satz 15.6 : *(von Fejï¿½r; [Barner - F., I., p. 458])*

Zu f wie oben bestimmt man die Fournier-Koeffizienten $c_k,\ k \in \mathbb{Z}$, und setzt für $m \in \mathbb{N}_\circ$ $\quad S_m(x) := \sum\limits_{k=-m}^{m} c_k\, e^{ikx}$ *sowie für $n \in \mathbb{N}$*

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_m(x).$$

Dann gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},}$$

außerdem ist $\|\sigma_n\|$ unabhängig von n beschränkt.

Bemerkungen:

1) σ_n ist das arithmetische Mittel der ersten n Partialsummen der Fourier-Reihe zu f.
Die Funktion σ_n konvergiert punktweise gegen$f$.

2) Wenn eine Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ konvergiert, so auch die zugehörige Folge $\{\beta_n\} := \Big\{\frac{1}{n}\,(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\Big\}$ der arithmetischen Mittel. Die Umkehrung ist falsch, etwa $\alpha_n = (-1)^n$. Dann folgt $\beta_n \to 0$. Also kann man aus $\sigma_n(x) \to f(x)$ nicht schließen, dass auch $S_m(x) \to f(x)$ gilt. Trotzdem hilft der Satz von Fejï¿½r bei der Diskussion der Konvergenz entscheidend weiter.

Beweis: Es ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\; e^{-ikt}\; dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\; e^{-ikt}\; dt$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad S_m(x) \quad &= \quad \sum_{k=-m}^{m} \Big\{\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\; e^{-ikt}\; dt\Big\}\; e^{ikx} \\
&= \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big\{\sum_{k=-m}^{m} e^{ik(x-t)}\Big\} f(t)\; dt \\
&\overset{\substack{t=y+x\\ \downarrow}}{=} \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} \Big\{\sum_{k=-m}^{m} e^{-iky}\Big\} f(y+x)\; dy \\
&\underset{*}{=} \quad \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{-iky} f(y+x)\; dy.
\end{aligned}$$

Für $y \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$ gilt ($\to$ Übung): $\sum\limits_{k=-m}^{m} e^{iky} = \frac{\cos(my)-\cos(m+1)y}{1-\cos y}$.

Gemäß $\sum\limits_{k=-m}^{m} e^{ik\cdot 0} = 2m+1$

und (L'Hospital) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\cos(my)-\cos((m+1)y)}{1-\cos y} = 2m+1$

wird $y \mapsto \Big(\cos(my) - \cos(m+1)y\Big)\Big/(1-\cos y)$ durch den richtigen Wert stetig in 0 fortgesetzt,

deshalb können wir schreiben

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(my) - \cos(m+1)y}{1-\cos y}\; f(x+y)\; dy.$$

Nun bildet man den Mittelwert $\sigma_n(x)$ und beachtet dabei, dass sich aufeinderfolgende Summanden kürzen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(ny)}{1-\cos y}\, f(x+y)\, dy = \\[2ex] \frac{1}{2\pi n} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin y/2}\right)^2 f(x+y)\, dy \end{cases}$$

Man nennt $K_n(y) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin y/2}\right)^2$ den Fejï¿½r'schen Kern.

Es gilt $K_n(y) \geq 0$ sowie

$$(2)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\, dy = 1.$$

$\Big($Betrachtet man $f \equiv 1$, so gilt mit derselben Herleitung Gleichung (1). Andererseits ist $S_m = 1$ (da $c_k = 0$ für $k \neq 0,\ c_\circ = 1$) und dann auch $\sigma_n \equiv 1$. Aus (1) wird dann (2).$\Big)$

Mit (2) und unserer Vereinbarung $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$

gilt

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)\, dy.$$

(1) läßt sich auch schreiben als (Variablentransformation $y \to -y$)

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\ f(x+y)\ dy \overset{\overset{K_n\text{gerade}}{\downarrow}}{=}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(-y)\ f(x+y)\ dy = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(-y)\ f(x-(-y))\ dy =$$

$$-\int_{\pi}^{-\pi} K_n(z)\ f(x-z)\ dz = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\ f(x-y)\ dy,$$

zusammen

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\frac{1}{2}\,\Big(f(x+y)+f(x-y)\Big)\;dy.$$

Schließlich sei $\quad g(y) = \frac{1}{2}\,\Big(f(x+y)+f(x-y)-f(x+)-f(x-)\Big)$ bei fixiertem x. Offenbar ist g stetig in 0 mit $g(0)=0$ und

$$\Big|f(x)-\sigma_n(x)\Big| = \Big|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\;g(y)\;dy\Big|.$$

Sei $\;\varepsilon > 0\;$ gegeben. Dazu findet man $\;\delta = \delta(\varepsilon, x)\;$ mit $\;|g(y)| \le \varepsilon\;$ für $\;|y| \le \delta$, und wir erhalten:

$$\int_{-\delta}^{\delta}\Big|K_n(y)\;g(y)\Big|\;dy \quad \overset{\substack{K_n\ge 0\\ \downarrow}}{\le} \quad \int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\;dy\cdot\varepsilon \quad \le$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\;dy\cdot\varepsilon \qquad \overset{\substack{(2)\\ \downarrow}}{=} \qquad \varepsilon.$$

Auf $\;[-\pi,-\delta]\;$ und $\;[\delta,\pi]\;$ ist

$$0 \le K_n(y) \;\le\; \frac{1}{2\pi n}\,\Big(\sin\delta/2\Big)^{-2}$$

und gemäß $\Big|g(y)\Big| \;\le\; 2\;\|f\|\;$ folgt

$$\Big|\int_{\delta}^{\pi} K_n(y)\;g(y)\;dy\Big| \quad\le\quad \tfrac{1}{n}\cdot\Big(\sin\delta/2\Big)^{-2}\|f\|,$$

$$\Big|\int_{-\pi}^{-\delta} \qquad \ldots \qquad\Big| \quad\le\quad -\;''\;- \quad ,$$

also $\quad \Big|\sigma_n(x)-f(x)\Big| \;\le\; \varepsilon + \frac{2}{n}\;\|f\|\cdot\Big(\sin\delta/2\Big)^{-2} \;\le\; 2\varepsilon$, wenn $\;n \ge n_\circ\Big(\delta,\|f\|\Big)$.

Das zeigt $\;\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x) = f(x)$.

Die Beschränktheitsaussage ist trivial:

$$\Big|\sigma_n(x)\Big| \;\le\; \|f\|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\;dy \;=\; \|f\|,$$

also $\|\sigma_n\| \leq \|f\|$ für alle n. □

Bemerkung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodische Regelfunktion. Wird f als stetig vorausgesetzt, so ist f (wegen seiner Periodizität!) sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, und das im Beweis auftretende δ hängt nicht von x ab. Dann gilt aber:

$$\sigma_n \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} f.$$

Andererseits ist

$$\sigma_n(x) = \tfrac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{m} c_k \, e^{ikx} \qquad *$$

$$= \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} \Big(1 - \ell/n\Big) c_\ell \, e^{i\ell x}$$

(zähle, wie oft c_ℓ, $\ell = -(n-1), \ldots, n-1$, in $*$ vorkommt) und Ausdrücke der Form $x \mapsto \sum_{\ell=-N}^{N} a_\ell \, e^{i\ell x}$, $a_\ell \in \mathbb{C}$, nennt man trigonometrische Polynome. Wir bekommen als

KOROLLAR: Ist f stetig und 2π-periodisch, so gibt es eine Folge trigonometrischer Polynome $|P_n|$ mit

$$P_n \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} f \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Dies entspricht genau dem Weierstraß Approximationssatz im Kontext von periodischen Funktionen. □

Mit dem Fejï¿½r'schen Satz kommen wir nun der Frage näher, wann f durch seine Fourier-Reihe dargestellt wird. Zunächst gilt der

Satz 15.7 : *(Identitätssatz für stetige Funktionen)*

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $2\pi -$ periodisch
mit den selben Fourier-Koeffizienten. Dann gilt $f = g$.

Daraus bekommen wir nun endlich einen

Satz 15.8 : *(Darstellungssatz)*

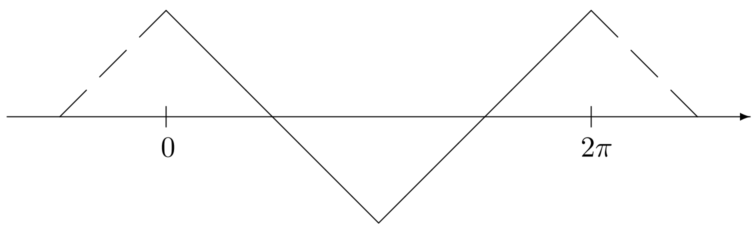
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch. Konvergiert die zu f gehörende Fourier-Reihe dann gleichmäßig gegen eine Funktion g, so gilt $\boxed{f = g}$, d.h. f wird durch seine Fourier-Reihe dargestellt.

! *Die Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn*

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ *für die Reihen der Fourier-Koeffizienten gilt.*

Beweis: Gleichmäßige Konvergenz bedeutet $g \in C^\circ(\mathbb{R})$, außerdem ist g 2π-periodisch und hat dieselben Fourier-Koeffizienten wie f. Es folgt $f = g$ nach 15.7. Gilt schließlich $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, so entnimmt man dem Beweis von 15.5 die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe. □

Beispiel: Sägezahn-Funktion



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \le x \le \pi \\ x - \frac{3}{2}\pi, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases} \qquad \text{+periodische Fortsetzung}$$

Die Fourier-Reihe lautet

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \, \frac{1}{n^2} \, \Big(1 - (-1)^n\Big) \, \cos(nx), \; x \in \mathbb{R},$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig, so dass wir $f = g$ schließen können.

Mit $x = 0$ folgt

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \Big(1 - (-1)^n\Big) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2\ell - 1)^2} \cdot 2,$$

also: $\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}}$.

Die Theorie der Fourier-Reihen kann also auch dazu benutzt werden, die Werte gewisser Zahlenreihen zu bestimmen.

Betrachtet man nur stetig, 2π-periodische Funktionen, so gibt es durchaus Beispiele, wo die Fourier-Reihe nicht überall konvergiert, also insbesondere nicht die Funktion darstellt.

[Übung → Beispiel!]

Ist f lediglich Regelfunktion mit den eingangs genannten Eigenschaften, so wird man erst recht die Gültigkeit von

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

erwarten. Um zu sehen, was passiert müssen wir etwas weiter ausholen.

Konvergenz im Sinne der Hilbert-Norm

ist das Stichwort, unter dem sich das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe für "schlechte Funktionen" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zusammenfassen läßt.

Definition 15.4 : *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen mit Periode 2π.*

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \; \overline{g}(x) \; dx$$

heißt Skalarprodukt von f mit g.

Eigenschaften:

i) f, g reell $\Longrightarrow \langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$

ii) $\langle g,\, f\rangle \;=\; \overline{\langle f, g\rangle}$

iii) $\langle f_1 + f_2, g\rangle \;=\; \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$

$\langle f, g_1 + g_2\rangle \;=\; \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle$

iv) $\langle cf, g\rangle \;=\; c\,\langle f, g\rangle,\; c \in \mathbb{C}$

$\langle f, cg\rangle \;=\; \overline{c}\,\langle f, g\rangle$

v) $\langle f, f\rangle \;\geq\; 0$

vi) f stetig und $\langle f, f\rangle \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad f \;=\; 0$

Außerdem gilt

Schwarz'sche Ungleichung: $\boxed{\left|\langle f, g\rangle\right|^2 \;\leq\; \langle f, f\rangle\,\langle g, g\rangle}$

Hierbei sind alle Funktionen wie in Def. 15.4.

Definition 15.5 *: a) Für f wie in Def. 15.4 definiert man die*

Hilbert-Norm: $\quad \|f\|_2 := \langle f, f\rangle^{1/2} \;=\; \left(\int_0^{2\pi} |f|^2\, dx\right)^{1/2}.$

b) f und g heißend zueinander orthogonal, wenn

$\langle f, g\rangle \;=\; 0$ *gilt* $\left(\Longrightarrow \langle g, f\rangle \;=\; 0\right)$

c) $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ heißt Orthonormalsystem (ONS), falls

$$\langle f_\alpha, f_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, \alpha \neq \beta \\ 1, \alpha = \beta \end{cases}$$

für alle $\alpha, \beta \in A$ $\quad$ ($A =$ beliebige Indexmenge)

Bemerkungen:

1) Die Hilbert-Norm erfüllt die

   Dreiecksungleichung: $\boxed{\|f+g\|_2 \;\leq\; \|f\|_2 + \|g\|_2}$,

   wie man durch Ausrechnen von $\|f+g\|_2^2 = \langle f+g,\, f+g\rangle$ unter Zuhilfenahme der Schwarz'schen Ungleichung sofort sieht.

2) Aus $\|f\|_2 = 0$ folgt $f = 0$ nur für stetige Funktionen f. (Es handelt sich also nur um eine Pseudonorm.)

3) Es gilt $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{inx}\, e^{-imx}\, dx = 2\pi\ \delta_{nm}$, also:

   $\boxed{\text{Die Funktionen } f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}, \text{ bilden ein ONS.}}$

4) Sei $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ irgendein ONS und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Regelfunktion. Die Zahlen

   $$\boxed{c_\alpha := \langle f, e_\alpha\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) e_\alpha(x)\ dx}$$

   heißen die Fourier-Koeffizienten bzgl. $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von f.

Warnung: Die Fourier-Koeffizienten bzgl. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sind

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\ dx,\ n \in \mathbb{Z},$$

unterscheiden sich also um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ von unserer früheren Definition 15.3.

$$\text{"neue Fourier-Koeff."} \quad \cdot \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad \text{"alte Fourier-Koeff."}$$

Dies hat natürlich für Darstellungs- und Konvergenzaussagen keine Bedeutung.

Einschub ($\to$ Übung): Summierbarkeit beliebiger Zahlenfamilien

$A =$ beliebige Indexmenge (also nicht notwendig abzählbar)

$(a_\alpha)_{\alpha\in A} =$ Familie von Zahlen $a_\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \in A$

Definition 15.6 *:* $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ *summierbar mit Summe $a \in \mathbb{C}$:* $\Longleftrightarrow$

zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert* $E_\varepsilon \subset A,\ \#\ E_\varepsilon < \infty,$

mit $\left|a - \sum\limits_{\alpha\in E} a_\alpha\right| < \varepsilon \quad \forall\ E \subset A,\ E \supset E_\varepsilon,\ \#\ E < \infty$

Man kann zeigen: $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ summierbar $\Longrightarrow$

alle $a_\alpha = 0$ bis auf höchstens abzählbar viele.

Wir beschreiben jetzt Eigenschaften von ONS.

Satz 15.9 : *Sei* $\{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *ein ONS,* f *eine* 2π*-periodische Regelfunktion.* $E \subset A$ *sei endlich.*

Sind $a_\alpha,\ \alpha \in E$, *irgendwelche komplexen Zahlen, so messen wir den Abstand* $\|f - \sum\limits_{\alpha\in E} a_\alpha w_\alpha\|_2$ *von* f *zu dieser Linearkombination.*
Es gilt: Der Abstand wird genau dann minimal, wenn man für a_α *die Fourier-Koeffizienten* c_α *von* f *bzgl.* $\{w_\alpha\}$ *wählt.*

Beweis:

$$\|f - \sum_{\alpha\in E} a_\alpha w_\alpha\|_2^2 =$$

$$\langle f, f\rangle - \sum_{\alpha\in E} \overline{a}_\alpha \underbrace{\langle f, w_\alpha\rangle}_{=c_\alpha} - \sum_{\alpha\in E} a_\alpha \underbrace{\langle w_\alpha, f\rangle}_{=\overline{c}_\alpha} + \langle \sum_{\alpha\in E} a_\alpha w_\alpha, \sum_{\beta\in E} a_\beta w_\beta\rangle$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{\alpha\in E} \overline{a}_\alpha c_\alpha - \sum_{\alpha\in E} a_\alpha \overline{c}_\alpha + \sum_{\alpha\in E} |a_\alpha|^2$$

$$= \underbrace{\|f\|_2^2 - \sum_{\alpha\in E} |c_\alpha|^2}_{=\|f - \sum_{\alpha\in E} c_\alpha w_\alpha\|_2^2} + \sum_{\alpha\in E} |c_\alpha - a_\alpha|^2$$

$\geq \|f - \sum\limits_{\alpha\in E} c_\alpha w_\alpha\|_2^2$ mit ï¿½ï¿½ = ” genau für $a_\alpha = c_\alpha$.

$\square$

Satz 15.10 : *(quadratische Summierbarkeit der Fourier-Koeffizienten)*

Sei $\{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ein ONS, $\{c_\alpha\}_{\alpha\in A}$ seien die Fourier-Koeffizienten einer 2π-periodischen Regelfunktion f bzgl. $\{w_\alpha\}$. Für alle $B \subset A$ ist $\sum\limits_{\alpha\in B} |c_\alpha|^2$ konvergent, und es gilt die

Bessel'sche Ungleichung: $\boxed{\sum\limits_{\alpha\in B} |c_\alpha|^2 \;\leq\; \|f\|_2^2}$.

Definition 15.7 : *Seien f, g_n, $n \in \mathbb{N}$, 2π-periodische Regelfunktionen*

$\{g_n\}$ konvergent gegen f im Sinne der Hilbert-Norm, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_2 = 0.$$

("Konvergenz im quadratischen Mittel")

Beispiel: ($\to$ Übung): $\|f - g_n\|_2 \to 0 \quad \not\Longrightarrow \quad$ punktweise Konvergenz

$$\begin{array}{c} \|f - g_n\|_2 \to 0 \\ \Uparrow \\ g_n \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} f \end{array}$$

Wir untersuchen folgende

FRAGE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sei } \{w_\alpha\}_{\alpha\in A} \text{ ein O.N.S.} \quad \text{Wann gilt} \\ \|f - \sum\langle f, w_\alpha\rangle w_\alpha\|_2 \longrightarrow 0 \\ \text{für jede } 2\pi\text{-periodische Regelfunktion } f \text{ ?} \end{array}}$$

Dabei ist die Konvergenz so gemeint: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $E_\varepsilon \subset A$ mit $\# \, E_\varepsilon < \infty$ und

$$\|f - \sum_{\alpha\in E} \langle f, w_\alpha\rangle w_\alpha\|_2 \leq \varepsilon$$

für alle $E \subset A$, $\# \, E < \infty$, $E \supset E_\varepsilon$.

Die Konvergenz läßt sich so formulieren:

Seien $c_\alpha = \langle f, w_\alpha \rangle$ die Fourier-Koeffizienten von f. Dann ist

$$\|f - \sum_{\alpha \in E} c_\alpha w_\alpha\|_2^2 = \|f\|^2 - \sum_{\alpha \in E} |c_\alpha|^2, \; E \subset A, \# E < \infty,$$

vgl. Rechnung im Beweis von Satz 15.10, so dass Konvergenz von $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha w_\alpha$ gegen f im Sinne der Hilbert-Norm gleichwertig ist zu

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2,$$

d. h. es gilt Gleichheit in der Bessel'schen Ungleichung.

Definition 15.8 : *Das ONS* $\{w_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *heißt vollständig, falls*

$$\text{(1)} \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{\alpha \in A} \Big| \langle f, w_\alpha \rangle \Big|^2$$

für jede 2π*-periodische Regelfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Bemerkungen:

i) Aus (1) folgt

$$\text{(2)} \qquad \boxed{\langle f, g \rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle f, w_\alpha \rangle \, \overline{\langle g, w_\alpha \rangle}}$$

(Parseval'sche Gleichung)

$\Big($ Beweis als $\to$ Übung: benutze (1) für $f + g, f + ig$, berechne andererseits $\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle$, $\|f + ig\|_2^2 = \ldots$, Vergleich ergibt (2) $\Big)$

ii) Die Bezeichnung "vollständig" hat zwei Erklärungen:

a) Jeder "Vektor" f läßt sich im Sinne der Hilbert-Konvergenz darstellen in der Form $\sum\limits_{\alpha\in A} \langle f, w_\alpha\rangle w_\alpha$, d.h. die Folge S_n der Partialsummen konvergiert bei beliebiger Numerierung gegen f bzgl. $\|\cdot\|_2$.

b) Es gibt keinen Vektor g mit $\|g\|_2 > 0$ und $\langle g, w_\alpha\rangle = 0$ für alle $\alpha \in A$, d.h. man kann zu $\{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$ keinen weiteren - zu allen w_α orthogonalen-Vektor mit Länge 1 hinzufügen. Aus (1) folgt ja $\|g\|_2^2 = \sum\limits_{\alpha\in A} \langle g, w_\alpha\rangle^2 = 0$.

□

Nach diesem Exkurs in die Hilbertraumtheorie werden wir mit dem Satz von Fejï¿½r zeigen:

$$\boxed{\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{ist vollständig.}}$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{(siehe Vorbemerkung)}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\right|^2 dx = 0 \\ \text{für jede } 2\pi-\text{periodische Regelfunktion } f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}, \\ c_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikt}\, dt\end{gathered}}$$

Anschließend befassen wir uns mit der Frage, wann und wo man doch noch auf punktweise oder sogar gleichmäßige Konvergenz schließen kann. Zur Vorbereitung dient

LEMMA: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-periodische Regelfunktion. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige 2π-periodische Funktion $\tilde f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $\|f-\tilde f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)-\tilde f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \le \varepsilon$.

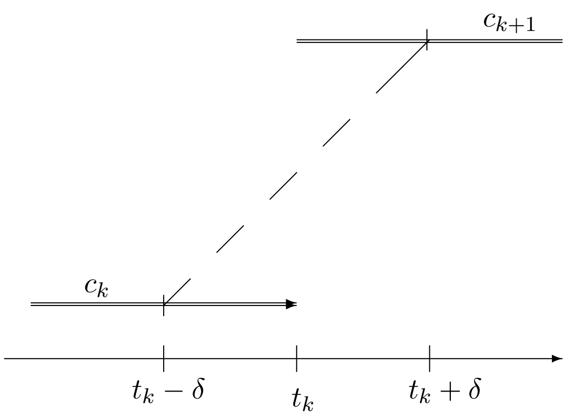
Idee: O.E. f reell, sonst betrachte Re f, Im f separat wähle nun eine Treppenfunktion $f_1:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ mit $\|f-f_1\|_\infty \le \varepsilon$ auf $[0,2\pi]$ und setze f_1 periodisch fort; man bekommt $\|f-f_1\|_2 \le \sqrt{2\pi}\cdot\varepsilon$.

Es geht also nur noch darum, zu f_1 eine stetige, 2π-periodische Funktion $\tilde{f}_1$ mit $\|f_1 - \tilde{f}_1\|_2 \leq \varepsilon$ zu finden, dann folgt

$$\|f - \tilde{f}_1\| \leq (\sqrt{2\pi} + 1)\varepsilon,$$

also die Behauptung.

Ist t_k eine Sprungstelle von f_1 in $[0, 2\pi]$, so definiert man $\tilde{f}_1$ wie im Bild,



die Sprungstelle wird linear interpoliert.
Für passende Wahl von δ folgt die Behauptung. □

(Details → Übung !)

Damit folgt

Satz 15.11 : *(Vollständigkeit im Sinne der Hilbert-Norm)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion mit Periode 2π.

Dann konvergiert die zu f gehörende Fourier-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{ikx}, \; c_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \; e^{-ikt} \; dt,$$

im Sinne der Hilbert-Norm gegen f. Das ONS

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *ist vollständig, und es gilt*

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \; dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Bemerkung: Die c_k sind hier wieder die alten Fourier-Koeffizienten.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Fall 1: f stetig.

Das Korollar zum Satz von Fejï¿½r liefert ein trigonometrisches Polynom $T(x) = \sum\limits_{k=-L}^{L} a_k \; e^{ikx}$ mit $\|f - T\|_\infty \leq \varepsilon$, also $\|f - T\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \; \varepsilon$. Sei $S_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \; e^{ikx}$. Ist $n \geq L$ und definiert man $a_k = 0$ für $|k| \geq L$, so folgt aus der Minimaleigenschaft 15.9 von S_n

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - T\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon \quad \forall \; n \geq L.$$

Fall 2: f wie im Satz

Nach dem Lemma findet man $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, 2π-periodisch mit

$$\|f - \tilde{f}\|_2 \leq \varepsilon$$

Sei $\tilde{S}_n$ das Fourier-Polynom zu $\tilde{f}$. $\Longrightarrow$

$$\|f - S_n\|_2 \leq \underbrace{\|f - \tilde{f}\|_2}_{\leq \varepsilon} + \|\tilde{f} - \tilde{S}_n\|_2 + \|S_n - \tilde{S}_n\|_2$$

Nach Fall 1 ist $\|\tilde{f} - \tilde{S}_n\|_2 \le \varepsilon$ für $n \ge n_\varepsilon$. Für den letzten Term gilt $(c_k, \tilde{c}_k =$ Fourier-Koeff. zu $f, \tilde{f})$

$$\|S_n - \tilde{S}_n\|_2 = \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{(c_k - \tilde{c}_k)}_{=\text{Fourier-Koeff. v. } f-\tilde{f}} e^{ikx} \Big\|_2$$

$$= \|S_n(g)\|_2, \; g := f - \tilde{f}, \; S_n(g) = \text{ Fourier-Polynom zu } g.$$

Es ist

$$\|S_n(g)\|_2 \le \|g - S_n(g)\|_2 + \|g\|_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechnung im Beweis v. 15.10 zeigt:} \\ \|g-S_n(g)\|_2 \le \|g\|_2}}{\le} 2\|g\|_2$$

Also zusammen:

$$\|S - \tilde{S}_n\|_2 \le 2 \cdot \|f - \tilde{f}\|_2 \le 2 \cdot \varepsilon,$$

d.h.

$$\|f - S_n\|_2 \le 4 \cdot \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_\varepsilon.$$

Also haben wir $\|f - \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikx}\|_2 \to 0$ bei $N \to \infty$ bewiesen, was äquivalent zum Eintreten von "$=$" in der Bessel'schen Ungleichung ist. Daraus folgt die letzte Behauptung des Satzes. □

Zum Beweis des Darstellungssatzes in der Hilbert-Norm haben wir den Satz von Fejï¿½r schon benutzt, wir werden jetzt diesen Satz erneut benutzen, um etwas über punktweise Konvergenz zu zeigen. Wir erinnern daran, dass der Satz von Fejï¿½r die Konvergenz von Mittelwerten

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\Big(S_\circ(x) + \ldots + S_{n-1}(x)\Big)$$

zum Inhalt hat. Darauf zugeschnitten ist das folgende Lemma über Zahlenfolgen, das nichts mit Fourier-Reihen zu tun hat und auf dessen länglichen Beweis wir deshalb verzichten. Man findet ihn bei Barner-Flohr I, p. 474 + 475.

LEMMA: Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} S_m$. Ist dann $\{\sigma_n\}$ konvergent gegen $\sigma \in \mathbb{C}$, und gibt es ein $c \ge 0$ mit

$$|a_n| \le c/n$$

für alle n, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} S_n = \sigma$. □

Satz 15.12 : *(Hinreichende Bedingung für punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe)*

> *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π – periodische Regelfunktion mit der*
>
> *Eigenschaft* $*$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$ *in Sprungstellen.*
>
> *Seien c_k die Fouerier-Koeffizienten von f. Es gelte*
>
> $$\boxed{|c_k| \le c\big/|k|,\ k \in \mathbb{Z} - \{0\},}$$
>
> *mit einem $c \ge 0$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe punktweise gegen f. Auf jedem kompakten Intervall $[a, b]$, auf dem f stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Bemerkung: Verzichtet man auf $*$, so gilt punktweise Konvergenz nur in den Stetigkeitsstellen, in Sprungstellen x konvergiert die Fourier-Reihe gegen $\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$.

Beweis: Man setzt
$$a_k = c_k \cdot e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_m$. Es ist $|a_k| = |c_k|$, so dass man abgesehen von der etwas abweichenden Numerierung genau in der Situation des Lemmas ist. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf $[a, b]$ ergibt sich aus $\sigma_n \overset{\rightrightarrows}{\longrightarrow} f$ auf $[a, b]$ (vgl. die Bem. im Anschluß an den Satz von Fejï¿½r, dass man für stetige f das " δ " unabhängig von x wählen darf.) □

Für welche Funktionenklassen gilt nun $|c_k| \le c\big/|k|$?

(1) $\boxed{f \text{ und } f' \text{ sind stetig (und natürlich } 2\pi\text{-periodisch)}}$:

Bis jetzt wissen wir dann nur:

i) falls $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \underset{15.8}{\Longrightarrow}$ glm. Kvgnz. der Fourier-Reihe gegen f

und

ii) Konvergenz in der Hilbert-Norm (Satz 15.11)

Es folgt (vgl. Üebung):

Satz 15.13 *:* *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $2\pi-$ periodisch mit stetiger Ableitung. Dann konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen f.*

ZUSATZ: Dieselbe Aussage gilt, wenn f stetig ist und f' auf $[0, \pi]$ endlich viele Sprungstellen hat.

In diesem Fall zerlegt man $[0, 2\pi]$ entsprechend und summiert anschließend auf. Mit dem Zusatz erhält man beispielsweise die gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe zur Sägezahnfunktion.

(2) f ist Treppenfunktion auf $[0, 2\pi]$ + periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ $\left(\Rightarrow |c_k| \leq \text{const}\Big/|k|\right)$

Betrachte Zerlegung $0 = x_\circ < \ldots < x_N = 2\pi$ mit

$$f\Big|_{(x_{k-1},x_k)} \equiv \alpha_k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 2\pi c_n &= \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \alpha_k \cdot e^{-int}\, dt \\
&= \tfrac{i}{n} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}} \right) \\
&= \tfrac{i}{n} \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k - \alpha_{k+1})\, e^{-inx_k} \text{ mit } \alpha_{N+1} = \alpha_1 \\
\Rightarrow \quad |c_n| &\leq \tfrac{1}{2\pi} \tfrac{1}{|n|} \left| \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \right|
\end{aligned}$$

Also ist Satz 15.12 anwendbar, man hat glm. Konvergenz auf allen Intervallen $[a, b]$, die keine Sprungstellen enthalten, in Sprungstellen x hat man Konvergenz gegen $\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$.

Durch Kombination von (1) und (2) folgt:

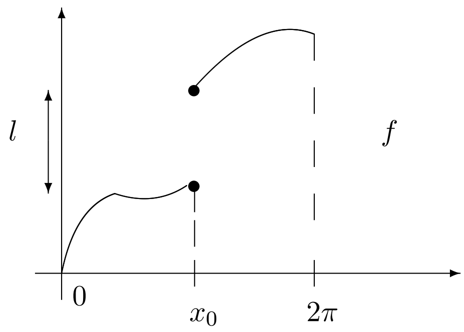
Satz 15.14 *: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch. f sei stetig auf $[0, 2\pi]$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten x_ℓ, und diese seien Sprungstellen. f' existiere und sei stetig auf $[0, 2\pi]$ abgesehen von höchstens endlich vielen Stellen $y_1, \ldots, y_k$, wo aber noch die einseitigen Ableitungen erklärt sind. Dann konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig auf jedem Intervall, das keine Sprungstelle von f enthält. In Sprungstellen x konvergiert sie gegen* $\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$.

Beweis: Man kann f schreiben als

$$f = f_1 + f_2$$

mit einer Treppenfunktion f_2 und einer stetigen Funktion f_1, deren Ableitung höchstens endlich viele Sprungstellen in $[0, 2\pi]$ hat. Die Behauptung folgt dann aus 2) und dem Zusatz zu 15.13.

Konstruktion:



$$f_2 = \begin{cases} 0 & \text{auf} \quad [0, x_\circ] \\ \ell & \text{auf} \quad (x, 2\pi] \end{cases} \quad , \quad f_1 = \begin{cases} f & \text{auf} \quad [0, x_\circ] \\ f - \ell & \text{auf} \quad [x_\circ, 2\pi] \end{cases}$$

analog bei mehr als einer Sprungstelle. □

Nun noch etwas für Spezialisten: Satz 15.14 deckt die Fälle ab, mit denen man in der Praxis konfrontiert wird. Aus mathematischer Sicht möchte man jedoch möglichst allgemeine Aussagen über das Konvergenzverhalten von Fourier-Reihen erzielen, was teilweise sehr tief in die Maßtheorie führt. Wir erwähnen nur ein Resultat, das innerhalb unserer Reichweite liegt.

Satz 15.15 *: (Dirichlet-Jordan)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und aus $BV\,([0, 2\pi])$. Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen f abgesehen von höchstens abzählbar vielen Ausnahmepunkten x und diese sind Sprungstellen von f. Dort gilt Konvergenz gegen $\frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big)$.

Beweis: Wir betrachten f auf $[0, 2\pi]$. Nach ï¿½ 10 hat f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, und diese sind Sprünge, also $f \in \mathcal{R}([0, 2\pi])$. Nach dem Approximationssatz für Regelfunktionen gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $\{g_n\}$ mit $g_n \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} f$. Seien c_k die Fourier-Koeffizienten von f, $c_{n,k}$ die von g_n. Die glm. Konvergenz ergibt

$$c_k = \lim_{n\to\infty} c_{n,k}.$$

In 2) haben wir bewiesen

$$\begin{aligned} |c_{n,k}| &\leq \tfrac{1}{2\pi}\,\tfrac{1}{|k|}\,\sum_{\ell=1}^{N_n} \Big|\alpha_{n,\ell}-\alpha_{n,\ell+1}\Big| \\ &\leq \tfrac{1}{2\pi}\,\tfrac{1}{|k|}\,\bigvee_0^{2\pi}(g_n) \end{aligned}$$

Benutzen wir nochmal $g_n \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} f$, so folgt unschwer $\bigvee_0^{2\pi}(g_n) \leq K$ mit $K<\infty$ unabhängig von n, also

$$|c_k| \leq \frac{K}{2\pi}\,\frac{1}{|k|}.$$

Aus Satz 15.12 folgt die Behauptung. □

Beispiele:
- Partialbruchzerlegung von cot
- Produktdarstellung von sin
- Wallis'sches Produkt

Sei $f(x) = e^{iax}$, $x \in (-\pi,\pi)$, $a \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Wir setzen f 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort, also insbesondere ist $f(-\pi)=f(\pi)$. Wir wählen dazu $f\Big((2n+1)\pi\Big) := \frac{1}{2}\,\Big(e^{i\pi a}+e^{-i\pi a}\Big) = \cos(\pi a)$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Fourier-Koeff. von f : $\quad c_k = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{iat}\,e^{-ikt}\,dt = (-1)^k\,\frac{\sin a\pi}{\pi}\,\frac{1}{a-k} \quad \Longrightarrow$

Fourier-Reihe von f:

$$\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\,e^{ikx}$$

punktweise konvergent gegen $f(x)$.

Durch Zerlegung in Re und Im folgt:

$\cos(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\,\cos(kx) =$

1) $\quad \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\,\Big(\frac{1}{a}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2a}{a^2-k^2}\,\cos(kx)\Big),\ |x|\leq\pi$

(überflüssig) $\quad \sin(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}\,\sin(kx) =$

2) $\frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{a^2-k^2} \sin(kx), \ |x| < \pi.$

Wählt man in 1) $x = \pi$, so folgt die

Partialbruchzerlegung des Cotangens:

$$\boxed{\pi \cdot \cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-k^2}, \quad a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.}$$

Die Reihe rechts konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, gliedweise Integration (gemäß $\frac{d}{dx}\log(\sin \pi x) = \pi \cot(\pi x)$) liefert für $x \in (0,1)$: (ersetze oben a durch x !)

$$\ln(\sin \pi x) = \ln c + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

Es gilt (Begründung!)

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln\left(\sin \pi x \middle/ x\right) = \ln \pi,$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 0,$$

also $\ln c = \ln \pi$, d. h. nach Anwenden von exp

Produktdarstellung von sin

$$\boxed{\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - x^2 \middle/ k^2\right)}$$

Mit $x = 1/2$ erhält man die

Wallis'sche Produktformel für π.

$$\boxed{\pi = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1}}$$

Schlußbemerkung: Bei allen Ausführungen zur Theorie der Fourier-Reihen hatte f die Periode 2π. Ist f τ-periodisch $\tau > 0$, so setzt man

$$\tilde{f}(x) := f\Big(\frac{\tau}{2\pi}\, x\Big)$$

und hat $\tilde{f}(x+2\pi) = f\Big(\frac{\tau}{2\pi}\, x + \tau\Big) = f\Big(\frac{\tau}{2\pi}\, x\Big) = \tilde{f}(x)$. Also gelten unsere Sätze für $\tilde{f}$ und durch Rücktransformation für f.

Bemerkung:

$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2} =: f(x)$ konvergiert glm. für $x \in [0, 1-\varepsilon]$,

ist also dort stetig;

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{ist definiert mit } \Big(\text{Vertauschung von } \sum \text{ und } \int\Big) \\ F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2-k^2}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(k^2 - t^2\Big)\Big|_0^x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(k^2 - x^2\Big) - \ln k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(1 - x^2\Big/k^2\Big),\ 0 \le x \le 1-\varepsilon \end{aligned}$$

Aus $\pi\cot(\pi x) - \frac{1}{x} = f(x)$ folgt:

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln[\sin(\pi x)\big/x]\Big) = \frac{d}{dx}\, F(x) \quad \text{auf } [\varepsilon, 1-\varepsilon] \implies$$

$$\ln\Big[\sin(\pi x)\big/x\Big] = \ln c + F(x) \quad \text{auf } [\varepsilon, 1-\varepsilon]$$

F ist stetig bis $0, F(0) = 0$; außerdem: $\ln\left[\frac{\sin(\pi x)}{x}\right] \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} \ln\pi$, also $\ln c = \ln\pi \ldots\ldots$