Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)
Lösungsvorschlag Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen sie mithilfe des Differentialquotienten die erste Ableitung der Funktion

(a) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \dfrac{1}{z}$

(b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^n, \quad n \in \mathbb{N}$

Lösung:

(a) $$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1/z - 1/z_0}{z-z_0} = -\frac{z-z_0}{zz_0(z-z_0)} = -\frac{1}{zz_0}, \quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0^2}$$

(b) $$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} = \frac{z_0^n + nz_0^{n-1}h + \ldots - z_0^n}{h}$$
$$= nz_0^{n-1} + \binom{n}{2} z_0^{n-2}h^+ \ldots + h^{n-1}, \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = nz_0^{n-1}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $z = 1 - i$ und $w = 3 + 4i$. Berechnen sie:

(a) $\mathrm{Re}(z \cdot w)$

(b) $|w^7|$

(c) $\overline{w \cdot \overline{w \cdot z}}$

(d) $\mathrm{Im}\dfrac{1}{z}$

(e) $\dfrac{w-i}{z}$

(f) $\sqrt{1+w}$

(g) e^z

(h) $\mathrm{Re}(e^{iw})$

(i) $\cosh(1-z)$

(j) $w\overline{w} - |w|^2$

Lösung:

(a) $\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(7+i) = 7$

(b) $|w^7| = |w|^7 = 5^7 = 78125$

(c) $\overline{w \cdot \overline{w \cdot z}} = \overline{w} \cdot wz = 25(1-i)$

(d) $\mathrm{Im}\frac{1}{z} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}$

(e) $\frac{w-i}{z} = 3i$

(f) $\sqrt{1+w} = 2\sqrt{1+i}$

(g) $e^z = e \cdot e^{-i}$

(h) $\mathrm{Re}(e^{iw}) = \mathrm{Re}(e^{-4}e^{3i}) = e^{-4}\cos 3$

(i) $\cosh(1-z) = \cos -1$

(j) $w\overline{w} - |w|^2 = 0$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen. Zeigen sie, dass

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z_j} \geq 0$$

Lösung:

Wir zeigen, dass

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z_j} = |\sum_{i=1}^{n} z_i|^2$$

I.A

n=1

$$\sum_{i,j=1}^{1} z_i\overline{z_j} = z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$$

n=2

$$\sum_{i,j=1}^{2} z_i\overline{z_j} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$$

I.V Sei die Aussage gezeigt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

I.S

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n+1} z_i\overline{z_j} &= \sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z_j} + z_1\overline{z_{n+1}} + \ldots + z_n\overline{z_{n+1}} + z_{n+1}\overline{z_1} + \ldots + z_{n+1}\overline{z_n} + z_{n+1}\overline{z_{n+1}} \\
&= |\sum_{i=1}^{n} z_i|^2 + z_1\overline{z_{n+1}} + \ldots + z_n\overline{z_{n+1}} + z_{n+1}\overline{z_1} + \ldots + z_{n+1}\overline{z_n} + |z_{n+1}|^2 \\
&= |\sum_{i=1}^{n+1} z_i|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Bestimmen sie alle Punkte im jeweiligen Definitionsbereich, an denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

(a) $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x + iy \mapsto y^2 \sin x + iy$

(b) $f_2\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad x + iy \mapsto \dfrac{x}{y} + ixy$

(c) $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x + iy \mapsto x^2 - iy^2$

(d) $f_4\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x + iy \mapsto x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Lösung:

Die Funktionen sind jeweils reel differenzierbar. Wir suchen die Stellen des Definitionsbereichs, an denen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt sind.

(a) Die CR-DGLn liefern das Gleichungssystem:
$y^2 \cos x = 1, \quad 2y \sin x = 0$
mit der Lösungsmenge$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, y = \pm 1\}$

(b) Die CR-DGLn liefern das Gleichungssystem:
$\frac{1}{y} = x, \quad -\frac{x}{y^2} = -y$
mit der Lösungsmenge$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \pm 1, y = \pm 1\}$

(c) Die CR-DGLn liefern das Gleichungssystem:
$x = -y, \quad 0 = 0$
mit der Lösungsmenge$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}$

(d) Die CR-DGLn liefern das Gleichungssystem:
$3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2, \quad -6xy = -6xy$
mit der Lösungsmenge$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$