Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)
Lösungsvorschlag zu Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Finden Sie eine reguläre Parametrisierung $\gamma\colon \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{C}$ für die Strecke, die die Punkte -1 und $-i$ verbindet, und berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag

Wir benutzen die Parametrisierung

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto (1-i)t - 1,$$

sodass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{1}{(1-i)t-1}(1-i)\ \mathrm{d}t \\
&= (1-i)\int_0^1 \frac{1}{t-1-it}\mathrm{d}t \\
&= (1-i)\int_0^1 \frac{t-1+it}{(t-1)^2+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-i}{2}\int_0^1 \frac{(1+i)t-1}{t^2-t+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-i}{2}\int_0^1 \frac{(1+i)t-1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\mathrm{d}t \\
&= 2(1-i)\int_0^1 \frac{(1+i)t-1}{(2t-1)^2+1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(1-i)\int_{-1}^{1} \frac{(1+i)\frac{s+1}{2}-1}{s^2+1}\frac{1}{2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1-i}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1+i)s-(1-i)}{s^2+1}\mathrm{d}s \\
&= \frac{(1-i)(1+i)}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s}{s^2+1}\mathrm{d}s - \frac{(1-i)^2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s \\
&= 0 - \frac{-2i}{2}[\arctan(s)]_{-1}^{1} \\
&= i\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= i\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gibt es jeweils einen geschlossenen (glatten) Integrationsweg γ in der komplexen Zahlenebene (der nicht durch eine Singularität des Integranden läuft) mit

(a) $\int_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = 0$?

(b) $\int_\gamma (z+1)^{-1}\,\mathrm{d}z \neq 0$?

(c) $\int_\gamma z^{-2}\,\mathrm{d}z = 0$?

(d) $\int_\gamma (z+i)^{-2}\,\mathrm{d}z \neq 0$?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösungsvorschlag

(a) Setze $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^{-1}$. Wähle

$$
\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} 2t+1, & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ -2t+3, & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}
$$

sodass gilt

$$
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t+1} 2\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{-2t+3}(-2)\,\mathrm{d}t
$$

$$= [\ln(2t+1)]_0^{\frac{1}{2}} + [\ln(-2t+3)]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$= (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(1) - \ln(2)) = 0.$$

Alternativ: Wähle
$$\gamma = \kappa_1(2).$$
Dann ist $f|_{D_{\frac{3}{2}}(2)}$ holomorph, sodass
$$\int_\gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(b) Wähle
$$\gamma = \kappa_1(-1)$$
und setze $f\colon \mathbb{C}\setminus\{-1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z+1)^{-1}$. Dann gilt
$$\int_\gamma (z+1)^{-1}\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (e^{it})^{-1} i e^{it}\ \mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\pi i \neq 0.$$

(c) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^{-2}$$
besitzt die Stammfunktion
$$F\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto -z^{-1},$$
sodass
$$\int_\gamma z^{-2}\mathrm{d}z = 0$$
für alle γ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt.

(d) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{-i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z+i)^{-2}$$
besitzt die Stammfunktion
$$F\colon \mathbb{C}\setminus\{-i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto -(z+i)^{-1},$$
sodass
$$\int_\gamma (z+i)^{-2}\mathrm{d}z = 0$$
für alle γ in $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ gilt. Damit existiert kein γ in $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, sodass
$$\int_\gamma (z+i)^{-2}\mathrm{d}z \neq 0.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < 1\}$ und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$, falls $a \neq 0$, bzw. $z \in \mathbb{C}$, falls $a = 0$, gilt:

$$\text{(a)} \quad \left|\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}\right| < 1 \iff |z| < 1, \qquad \text{(b)} \quad \left|\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}\right| = 1 \iff |z| = 1.$$

Lösungsvorschlag

Ohne Einschränkung $a \neq 0$. Dann gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}\right|^2 &= \frac{|a|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |z|^2}{1 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{(|a|^2 - 1) + (1 - |a|^2)|z|^2}{1 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + (1 - |a|^2)\frac{|z|^2 - 1}{1 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2} \\
&= 1 + \frac{1 - |a|^2}{|1 - \overline{a}z|^2}(|z|^2 - 1) \\
&= 1 + \frac{(1 - |a|^2)(|z| + 1)}{|1 - \overline{a}z|^2}(|z| - 1).
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich direkt beide Aussagen, da

$$\frac{(1 - |a|^2)(|z| + 1)}{|1 - \overline{a}z|^2} > 0$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$.