Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)
Blatt 3

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen sind holomorph auf $\mathbb{C}$:

1. a) (1) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3 \cos(z^2)$,

   b) (1) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z\overline{z})$,

   c) (2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Re}(\cos(z)) + i\mathrm{Im}(\cosh(iz))$?

2. (2) Für welches fixierte $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion
$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto ay^3 - yx^2$$
Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$? Geben Sie, falls existent, den zugehörigen Imaginärteil der holomorphen Funktion an.

Lösungsvorschlag

1. a) Die Funktion ist holomorph als Verkettung, Produkt etc. von holomorphen Funktionen.

   b) Es gilt
$$f(z) = \exp(x^2 + y^2) = u(x,y) + iv(x,y)$$
für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit
$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \exp(x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad v = 0.$$
Damit erhalten wir
$$\partial_1 u(x,y) = \exp(x^2 + y^2)2x \quad \text{und} \quad \partial_2 v(x,y) = 0$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die Cauchy-Riemmanschen Differentialgleichungen sind also nicht erfüllt, sodass f nicht holomorph ist.

   c) Da
$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, folgt
$$f(z) = \mathrm{Re}(\cos(z)) + i\mathrm{Im}(\cosh(iz)) = \mathrm{Re}(\cos(z)) + i\mathrm{Im}(\cos(z)) = \cos(z)$$
für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist f holomorph.

2. Es gilt
$$\partial_1 u(x,y) = -2yx,\ \partial_2 u(x,y) = 3ay^2 - x^2$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Damit u Realteil einer holomorphen Funktion ist, müsste es eine Funktion $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben mit
$$\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y),\ \partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die erste Identität liefert
$$v(x,y) = -y^2 x + C(x)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und einer (noch zu bestimmenden) Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus der zweiten Identität folgt dann
$$3ay^2 - x^2 = -(-y^2 + C'(x)) = y^2 - C'(x)$$
bzw.
$$(3a-1)y^2 = x^2 - C'(x)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Damit müssen beide Seiten konstant sein und mit $(3a-1)0^2 = 0$ folgt, dass beide Seiten sogar gleich 0 sein müssen. Also gilt $C'(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ und $a = 1/3$. Insgesamt erhalten wir
$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto -y^2 x + \frac{1}{3}x^3 + c$$
für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und
$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{1}{3}y^3 - yx^2.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie für $r \neq 1, r \neq 3$
$$\int_{\kappa_r(0)} \left[(z-2)^3 + \frac{z^2+1}{z-i} + \frac{1}{(z+3)^2} \right] \mathrm{d}z.$$
[Hinweis: Für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ definieren wir $\kappa_r(z_0)\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + re^{it}$.]

Lösungsvorschlag

Wir definieren
$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z-2)^3, \\ g&\colon \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z^2+1}{z-i}, \\ h&\colon \mathbb{C} \setminus \{-3\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{(z+3)^2}. \end{aligned}$$

Da f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

für alle $r > 0$.

Eine Stammfunktion von h ist

$$H\colon \mathbb{C} \setminus \{-3\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto -\frac{1}{z+3},$$

sodass

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} h(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

für alle $r \in [0, \infty) \setminus \{3\}$.

Es ist

$$\frac{z^2+1}{z-i} = \frac{(z+i)(z-i)}{z-i} = z + i.$$

Da g holomorph ist, folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} g(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Insgesamt erhalten wir für alle $r \in [0, \infty) \setminus \{3\}$ also

$$\int\limits_{\kappa_r(0)} \left[(z-2)^3 + \frac{z^2+1}{z-i} + \frac{1}{(z+3)^2}\right] \mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine in $a \in D$ komplex differenzierbare Funktion und sei

$$D^* = \{\overline{z}\ :\ z \in D\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon D^* \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

in $\overline{a}$ differenzierbar ist mit

$$g'(\overline{a}) = \overline{f'(a)}.$$

Lösungsvorschlag

Es gilt

$$\frac{g(\overline{a}+h)-g(\overline{a})}{h} = \frac{\overline{f(a+\overline{h})}-\overline{f(a)}}{h} = \frac{\overline{f(a+\overline{h})-f(a)}}{h} = \overline{\left(\frac{f(a+\overline{h})-f(a)}{\overline{h}}\right)} \to \overline{f'(a)}$$

für $h \to 0$, da $\overline{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ stetig ist.