

Übungen zur Vorlesung  
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)  
Blatt 4

Abgabe bis Freitag 11.6.21.

---

**Bemerkung**

Für  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  definieren wir

$$\kappa_r(z_0): [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it}.$$

**Aufgabe 1 (7 Punkte)**

Sei

$$f: \mathbb{C} \setminus \{2i, 3 + 4i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z - 2i} + \frac{1}{z - 3 - 4i}.$$

a) (3) Bestimmen Sie

$$\int_{\kappa_r(0)} f(z) dz$$

für  $r \neq 2, 5$ .

b) (4) Bestimmen Sie

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

für

$$\gamma: [0, 8) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} 3 + (t - 1)3i, & \text{falls } 0 \leq t \leq 2, \\ 3i + (3 - t)3, & \text{falls } 2 \leq t \leq 4, \\ -3 + (5 - t)3i, & \text{falls } 4 \leq t \leq 6, \\ -3i + (t - 7)3, & \text{falls } 6 \leq t < 8. \end{cases}$$

[Hinweis: Skizzieren Sie  $\gamma$ .]

### Aufgabe 2 (9 Punkte)

Berechnen Sie mithilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Integrale:

i) (3)  $\int_{\kappa_{1/2}(0)} \frac{\exp(z)}{z^3(1+z)} dz,$

ii) (2)  $\int_{\kappa_2(0)} \frac{\cosh(\pi z)}{z+i} dz,$

iii) (4)  $\int_{\kappa_r(0)} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m} dz, a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| < r < |b|, m, n \in \mathbb{N}.$

### Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei  $f$  eine in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{B_1(0)}$  holomorphe Funktion. Welche (holomorphe) Funktion wird durch

$$z \mapsto \int_{\kappa_1(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$  dargestellt? (Begründung!)