Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)
Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Integrale haben den Wert 0 und welche nicht?

$$\text{i)} \int_{\kappa_2(2)} \frac{z^2-4}{z^2-1}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{ii)} \int_{\kappa_2(0)} \frac{z}{z^2-4z+3}\,\mathrm{d}z,$$

$$\text{iii)} \int_{\kappa_2(3i)} \frac{z^2+4}{(2i-z)z}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{iv)} \int_{\kappa_1(2i)} \frac{z^2+4}{(2i-z)^2z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Begründen Sie Ihre Antworten!

[Hinweis: Für $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ definieren wir $\kappa_r(z_0)\colon [0,2\pi) \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + re^{it}$.]

Lösungsvorschlag

i) Es gilt

$$\frac{z^2-4}{z^2-1} = \frac{z^2-4}{(z+1)(z-1)}$$

sowie $1 \in \kappa_2(2)$. Damit erhalten wir

$$\int_{\kappa_2(2)} \frac{z^2-4}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\ \frac{1^2-4}{(1+1)} = -3\pi i.$$

ii) Es gilt

$$\int_{\kappa_2(0)} \frac{z}{z^2-4z+3}\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa_2(0)} \frac{z}{(z-1)(z-3)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\ \frac{1}{1-3} = -\pi i.$$

iii) Die Funktion

$$z \mapsto \frac{z^2+4}{(2i-z)z} = \frac{(z+2i)(z-2i)}{(2i-z)z} = \frac{z+2i}{z}$$

ist holomorph auf $\kappa_2(3i)$ und somit gilt

$$\int\limits_{\kappa_2(3i)} \frac{z^2+4}{(2i-z)z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

iv) Es gilt

$$\frac{z^2+4}{(2i-z)^2z^2} = \frac{(z+2i)(z-2i)}{(2i-z)^2z^2} = \frac{z+2i}{(2i-z)z^2}$$

und somit

$$\int\limits_{\kappa_1(2i)} \frac{z^2+4}{(2i-z)^2z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\frac{2i+2i}{(2i)^2} = 2\pi.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen folgender Funktionen um den Entwicklungspunkt 0.

i) (2) $\dfrac{z}{1+z^3}$, ii) (2) $\dfrac{e^{z^4}-1}{z^3}$, iii) (2) $\dfrac{1}{3+4i+z}$.

Lösungsvorschlag

i) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{z}{1+z^3} &= z\,\frac{1}{1-(-z^3)}\\ &= z\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-z^3)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{3k+1}\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{e^{z^4}-1}{z^3} &= z^{-3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z^4)^k}{k!} - 1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{4k-1}}{k!}\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

iii) Es gilt

$$\frac{1}{3+4i-z} = \frac{1}{3+4i}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z}{3+4i}}\right)$$
$$= \frac{1}{3+4i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3+4i}\right)^k.$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 5$.

Aufgabe 3 (4 + 4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{-i,-2\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{2+i+2z}{(z+i)(2+z)}.$$

i) (1) Finden Sie Konstanten $A, B \in \mathbb{C}$, sodass $f(z) = A/(z+i) + B/(2+z)$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i,-2\}$.

ii) (1) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$?

iii) (2) Berechnen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

Es sei

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{-4,2\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{6z+8}{(z+4)(z-2)}.$$

Berechnen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt 0.

Lösungsvorschlag

i) Es gilt

$$f(z) = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{2+z} = \frac{A(2+z)+B(z+i)}{(z+i)(2+z)} = \frac{2A+Bi+(A+B)z}{(z+i)(2+z)}$$

$z \in \mathbb{C}\setminus\{-i,-2\}$, sodass

$$2A + Bi = 2 + i \quad \text{und} \quad A + B = 2.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Da
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i+1}\frac{1}{1-\frac{z-1}{-(i+1)}}$$
und
$$\left|\frac{z-1}{-(i+1)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z-1| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < \sqrt{2}$$
sowie
$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-1}{-3}}$$
und
$$\left|\frac{z-1}{-3}\right| = \frac{1}{3}|z-1| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 3,$$
konvergiert die Taylorreihe von f um 1 auf $B_{\sqrt{2}}(1)$.

iii) Wir erhalten mit den Darstellungen aus (ii)
$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{1-\frac{z-1}{-(i+1)}} - \frac{1}{1-\frac{z-1}{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i+1}(-1)^k\left(\frac{1}{i+1}\right)^k + \frac{1}{3}(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)(z-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\left(\frac{1}{i+1}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right)(z-1)^k \end{aligned}$$
für alle $z \in B_{\sqrt{2}}(1)$.

Wir bemerken, dass
$$\frac{6z+8}{(z+4)(z-2)} = \frac{10}{3(z-2)} - \frac{8}{3(z+4)}.$$
Es ist
$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{-1}{2}\ \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{-1}{2}\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$ sowie

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+4} &= \frac{1}{4}\ \frac{1}{1 - \dfrac{-z}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{4^{k+1}}
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 4$. Damit erhalten wir

$$\frac{6z+8}{(z+4)(z-2)} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \right) z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$.