

**Übungen zur Vorlesung**  
**Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)**  
**Blatt 6**

Abgabe bis Freitag den 9.7.21.

---

**Aufgabe 1 (5 Punkte)**

- i) Bestimmen Sie (falls konvergent) die Laurent-Reihe der Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto 1/z$  auf der gelochten Kreisscheibe  $B'_r(z_0)$  mit
- a) (1)  $z_0 = 0, r = 1$ ,
  - b) (1)  $z_0 = 2, r = 1$ ,
  - c) (1)  $z_0 = i, r = 2$ .
- ii) (2) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe der Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^z/z^2$  auf einer gelochten Kreisscheibe um den Nullpunkt.

**Aufgabe 2 (6 Punkte)**

Es sei

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von  $f$

- i) (2) im Kreisring  $1 < |z| < 3$ ,
- ii) (2) im Kreisring  $1 < |z - 2| < 3$ ,
- iii) (2) um den Entwicklungspunkt  $z_0 = 1$ , die im Punkt  $w_0 = 1 + 3i$  konvergiert.

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Geben Sie holomorphe Funktionen mit (passendem Definitionsbereich und) folgenden Eigenschaften an:

i) (2)  $\int_{\kappa_r(0)} f(w)w^k dw = 0, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, r \in (0, \infty),$

ii) (3)  $\int_{\kappa_r(0)} f(w)w^k dw = -2\pi i, \quad f^{(k)}(0) = k! \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, r \in (1, 2).$

[Hinweis: Betrachten Sie die Laurent-Entwicklung auf einem geeigneten Kreisring.]

### Aufgabe 4 (3 Punkte)

Charakterisieren Sie jeweils alle Singularitäten von

i) (1)  $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+2i)},$

ii) (1)  $f(z) = \frac{z+1}{z^2-1},$

iii) (1)  $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}.$