**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

**Übungen zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik für Ingenieure IV b (SoSe 2021)**
**Blatt 6**

---

## Aufgabe 1 (5 Punkte)

i) Bestimmen Sie (falls konvergent) die Laurent-Reihe der Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 1/z$ auf der gelochten Kreisscheibe $B'_r(z_0)$ mit

a) (1) $z_0 = 0, r = 1,$

b) (1) $z_0 = 2, r = 1,$

c) (1) $z_0 = i, r = 2.$

ii) (2) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe der Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^z/z^2$ auf einer gelochten Kreisscheibe um den Nullpunkt.

## Lösungsvorschlag

i) Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{-2}\right)} = -i\frac{1}{1-\left(\frac{z-i}{-i}\right)}$$

und

$$\left|\frac{z-2}{-2}\right| = \frac{1}{2}|z-2| < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 2$$

sowie

$$\left|\frac{z-i}{-i}\right| = |z-i| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < 1.$$

a) Die Laurentreihe ist gegeben durch

$$f(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}.$$

b) Da $r = 1 < 2$ gilt, ist die Laurentreihe gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{-2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-2}\right)^k (z-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^{k+1}}(z-2)^k.$$

c) Da $r = 2 > 1$ gilt, existiert keine Laurentreihe von $f$ um $z_0 = i$, die auf ganz $B'_2(i)$ konvergiert.

ii) Es gilt

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-2} = \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}^*$.

## Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 3\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von $f$

i) (2) im Kreisring $1 < |z| < 3$,

ii) (2) im Kreisring $1 < |z-2| < 3$,

iii) (2) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $w_0 = 1 + 3i$ konvergiert.

## Lösungsvorschlag

Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 3\}$.

i) Es gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{-1}{z}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2}z^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^k z^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2}z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^{k-1} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} -\frac{1}{2}z^{k} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{2}(-1)^{-k-1} z^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} -\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right) z^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} -z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k
\end{aligned}$$

für alle $z \in A_{1,3}(0)$.

ii) Es gilt

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z-2}\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{z-2}\right)}$$

und

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{-3}\right)}$$

sowie

$$\frac{1}{3-z} = \frac{-1}{z-2}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z-2}\right)},$$

sodass

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\frac{-1}{z-2}\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{z-2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{-3}\right)} + \frac{-1}{z-2}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z-2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-2}\right)^k + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{-3}\right)^k + \frac{-1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2}(z-2)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6(-3)^k}(z-2)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)(z-2)^{-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}-1\right)(z-2)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6(-3)^k}(z-2)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{(-1)^k}{2}-1\right)(z-2)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6(-3)^k}(z-2)^k
\end{aligned}$$

für alle $z \in A_{1,3}(2)$.

iii) Da $-1, 3 \in \overline{D}_2(1)$ gilt, betrachten wir den Kreisring $A_{2,\infty}(1) \ni 1+3i$. Es gilt

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} = -(z-1)^{-1}$$

und

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z-1}\right)}$$

sowie

$$\frac{1}{3-z} = \frac{-1}{z-1}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{z-1}\right)},$$

sodass

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z-1}\right)} + \frac{-1}{z-1}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{z-1}\right)} \\
&= -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z-1}\right)^k + \frac{-1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^k \\
&= -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{2}(z-1)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)2^k(z-1)^{-(k+1)} \\
&= -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-2)^{-(k+1)}}{2}(z-1)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)2^{-(k+1)}(z-1)^k \\
&= (-1)(z-1)^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{-2}\left(\frac{(-2)^{-(k+1)}}{2} + (-1)2^{-(k+1)}\right)(z-1)^k \\
&= (-1)(z-1)^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{-2}(-1)2^{-(k+1)}\left(\frac{(-1)^k}{2}+1\right)(z-1)^k
\end{aligned}$$

für alle $z \in A_{2,\infty}(1)$.

**Aufgabe 3 (5 Punkte)**

Geben Sie holomorphe Funktionen mit (passendem Definitionsbereich und) folgenden Eigenschaften an:

i) (2) $\displaystyle\int_{\kappa_r(0)} f(w)w^k \mathrm{d}w = 0, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}_0, r \in (0, \infty)$,

ii) (3) $\displaystyle\int_{\kappa_r(0)} f(w)w^k \mathrm{d}w = -2\pi i, \quad f^{(k)}(0) = k!\,\frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}_0, r \in (1, 2)$.

[Hinweis: Betrachten Sie die Laurent-Entwicklung auf einem geeigneten Kreisring.]

**Lösungsvorschlag**

i) Wir lesen die Koeffizienten der Laurent-Reihe ab und erhalten

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

ii) Wir lesen die Koeffizienten der Laurent-Reihe ab und erhalten

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} z^k \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} z^k \\
&= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} z^k \\
&= -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \\
&= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2+z} \\
&= \frac{-2-z+z-1}{(z-1)(2+z)} \\
&= \frac{3}{(1-z)(2+z)}.
\end{aligned}$$

### Aufgabe 4 (3 Punkte)

Charakterisieren Sie jeweils alle Singularitäten von

i) (1) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+2i)}$,

ii) (1) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-1}$,

iii) (1) $f(z) = \sin(\frac{1}{z}) + \frac{1}{z}$.

### Lösungsvorschlag

i) Polstelle 2-ter Ordnung bei $z = i$ und Polstelle 1-ter Ordnung bei $z = -2i$.

ii) Hebbare Definitionslücke bei $z = -1$ und Polstelle 1-ter Ordnung bei $z = 1$.

iii) Wesentliche Singularität bei $z = 0$.