Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 1
Abgabe: 27.04.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

(i) Seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z_j} \geq 0.$$

(ii) Zeigen Sie: $f : H \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ mit $H := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ ist injektiv und $f(H) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $(z_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$ für alle $n \geq 0$. Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$$

seien konvergent. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2$ konvergiert.

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}(= \mathbb{R}^2)$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell differenzierbare Abbildung

$$f : z = x + iy \mapsto f(z) = f(x + iy) = f(x, y).$$

Dann sind die Pompeiu-Wirtinger Ableitungen von f in z_0 definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann reell differenzierbar in z_0, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + \beta \overline{h} + o(h) \quad \text{für } h \to 0;$$

in diesem Fall sind α und β eindeutig bestimmt und es gilt

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0).$$

(b) f ist genau dann komplex differenzierbar in z_0, wenn f reell differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear und sei $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die darstellende Matrix von T bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist $\mathbb{C}$-linear,

(ii) Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $T(z) = cz$ für alle $z \in \mathbb{C}$,

(iii) Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ total differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $Df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \mathrm{Im}\, f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial \mathrm{Im}\, f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Aufgabe 5 (2+2+2+2=8 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f unter jeder der folgenden Bedingungen konstant ist:

(i) $f' \equiv 0$.

(ii) $\mathrm{Re} f \equiv c$, $(c \in \mathbb{C})$.

(iii) $\overline{f}$ ist holomorph.

(iv) $|f|$ ist holomorph.