Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 10
Abgabe: 29.06.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie: Jede nullstellenfreie, holomorphe Funktion f auf G hat eine Wurzel, d.h. zu jedem f, welches nullstellenfrei und holomorph ist, existiert eine holomorphe Funktion g auf G mit $f = g^2$.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines nicht einfach zusammenhängenden Gebiets G und einer nullstellenfreien, holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ an, derart, dass $f \neq g^2$ für alle holomorphen Funktionen $g : G \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (2+2+2+3=9 Punkte)

Wir definieren Funktionen $\varphi : \mathbb{C} - \{-i\} \to \mathbb{C}$ und $\psi : \mathbb{C} - \{-1\} \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i} \quad \text{und} \quad \psi(z) := i\frac{1+z}{1-z}$$

für $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$ bzw. $z \in \mathbb{C} - \{1\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) φ und ψ sind holomorph und invers zueinander.

(b) $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ für $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$.

(c) $\operatorname{Im} \psi(z) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ für $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

(d) $\psi(D_1(0)) = \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\varphi(\mathbb{H}) = D_1(0)$.

Aufgabe 3 (5+6=11 Punkte)

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ nullstellenfrei und holomorph, welche einen holomorphen Logarithmus auf G besitzt. Zeigen Sie, dass G einfach zusammenhängend ist. (*Hinweis:* Blatt 3, Aufgabe 2)

(b) Seien Ω_1, Ω_2 zwei nicht leere, offene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt *biholomorph*, falls sie eine holomorphe und bijektive Funktion ist, deren Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist.

Zeigen Sie, dass das Bild eines einfach zusammenhängenden Gebietes unter einer biholomorphen Abbildung einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei X ein metrischer Raum. Zwei stetige, geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ heißen *homotop* in X, falls es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1]^2 \to X$ - eine *Homotopie* - existiert mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0,1]$,

(ii) $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$,

(iii) $\gamma(s,1) = \gamma(s,0)$ für alle $s \in [0,1]$.

Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und seien γ_0 und γ_1 zwei stetige, geschlossene, in Ω homotope Wege. Zeigen Sie:

$$\eta(\gamma_0, z) = \eta(\gamma_1, z) \quad (z \in \mathbb{C} - \Omega).$$

(*Hinweis:* Für eine zugehörige Homotopie $\gamma : [0,1]^2 \to X$ sei $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$. Überlegen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} - \Omega$ die Funktion $[0,1] \ni s \mapsto \eta(\gamma_s, z)$ lokal konstant ist.)