Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 11
Abgabe: 06.07.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (3+3+3=9 Punkte)

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$$

($z \in \mathbb{C} - \{-1, 1, 3\}$. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von f

(a) im Kreisring $1 < |z| < 3$.

(b) im Kreisring $1 < |z-2| < 3$.

(c) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1 + 3i$ konvergiert.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Klassifizieren Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und geben Sie im Falle eines Poles dessen Ordnung an:

(a) $\dfrac{\sin^2(z)}{z^4}$.

(b) $\dfrac{\cos(z)-1}{z^2}$.

(c) $\dfrac{1}{z^2(z+1)} + \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

(d) $z\cot^2(z)$ mit $\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$.

Aufgabe 3 (4+4+3=11 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f. Zeigen Sie:

(a) Ist a ein Pol für f, so gibt es ein $R > 0$ so, dass für alle $r \in (0, R)$ ein $s > 0$ existiert mit $\mathbb{C} - \overline{D}_s(0) \subset f(D_r(a) - \{a\})$.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $\frac{1}{f}$.)

(b) Ist $\mathrm{Re}(f)$ in einer punktierten Umgebung von a nach oben oder unten beschränkt, so ist a eine hebbare Singularität für f.

(c) a ist kein Pol für e^f.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(2-z)(1+z^2)}$$

auf dem Kreisring $K(i,1,2) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < 2\}$ in ihre Laurentreihe.