Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 2
Abgabe: 04.05.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (2+2+2+2=8 Punkte)

Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind.

(a) $f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3 \quad (x, y \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x+iy) = \exp(y) - i\exp(x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$,

(c) $f(z) = \sin(|z|)$,

(d) $f(z) = |z|^2(|z|^2 - 2)$.

Aufgabe 2 (3+3+4=10 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei in einem Punkt z_0 reell differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0)}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)}$,

(b) $\dfrac{\partial (fg)}{\partial z}(z_0) = f(z_0)\dfrac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0)$,

(c) Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen, ist $f(z_0) \in V$, und ist $h : V \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ reell differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial (h \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial z}(f(z_0))\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}(z_0)\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0).$$

Wie lauten die zu (b) und (c) analogen Rechenregeln für die partiellen Ableitungen nach $\overline{z}$?
(*Hinweis:* Sie dürfen die üblichen Rechenregeln für reell partiell differenzierbare Funktionen benutzen.)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine in $a \in D$ komplex differenzierbare Funktion und sei $D^* = \{\overline{z} : z \in D\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : D^* \to \mathbb{C},\ g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

in $\overline{a}$ komplex differenzierbar ist und $\overline{f'(a)}$ die Ableitung $g'(\overline{a})$ ist.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ sei auf Ω holomorph mit $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Die Funktion f heißt auf Ω harmonisch, falls $\triangle f \equiv 0$ auf Ω gilt. Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen f, u und v auf Ω harmonisch.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \log(|z|)$ ist auf $\mathbb{C} - \{0\}$ harmonisch.

Aufgabe 5 (2+2+2+2=8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$. Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(a) $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \in \Omega$.

(c) $f(n^{-1}) = f(-n^{-1}) = n^{-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\pm n^{-1} \in \Omega$.

(d) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.