Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 4
Abgabe: 18.05.22, 11 Uhr, online

Bemerkung:

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\partial D_R(z_0)$ stets die Kurve, welche den Rand der offenen Kreisscheibe $D_R(z_0)$ im positiven Sinn einmal durchläuft.

Aufgabe 1 (6+6=12 Punkte)

(i) Sei $\eta \in D_r(z_0), z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z-\eta} = \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi i.$$

(ii) Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel, um folgende Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{\partial D_1(\frac{3}{2})} \frac{\exp(z)}{z(z-1)^3}\,\mathrm{d}z,$

(b) $\displaystyle\int_{\partial D_r(0)} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^m}, \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| < r < |b|, m, n \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 2 (6+6=12 Punkte)

(a) Sei f eine in einer offenen Obermenge der abgeschlossenen Kreisschreibe $\overline{D_1(0)}$ holomorphe Funktion. Welche (holomorphe) Funktion wird durch

$$z \mapsto \int_{\partial D_1(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

auf $\mathbb{C} - \overline{D_1(0)}$ dargestellt? (Begründung!)

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$g : \mathbb{C} - \partial D_1(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi - z)}$$

eine holomorphe Funktion definiert wird und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Für offene und beschränkte Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $A(\Omega)$ die Menge aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen und auf Ω holomorphen Funktionen.
Sei nun $R > 0$ und $f \in A(D_R(0))$. Zeigen Sie:

$$\forall z \in D_R(0) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

(*Hinweis:* Definieren Sie für $0 < r \leq 1$ die Funktion $f_r : D_{\frac{R}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ durch $f_r(z) := f(rz)$ und wenden Sie auf f_r für $0 < r < 1$ die Cauchysche Integralformel an (wieso ist dies erlaubt?). Nutzen Sie dann die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $(r, z) \mapsto f(rz)$ aus. (Wieso liegt gleichmäßige Stetigkeit vor?))

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $R > 0$ und sei $f \in A(D_R(0))$. Beweisen Sie die Poissonsche Integralformel

$$\forall z \in D_R(0) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \mathrm{d}\zeta.$$

(*Hinweis:* Definieren Sie für festes $w \in D_R(0)$ die Funktion $g \in A(D_R(0))$ durch

$$g(z) := \frac{f(z)}{R^2 - \overline{w}z} \quad \text{für alle } z \in D_R(0)$$

und wenden Sie auf diese Aufgabe 3 an. Setzen Sie anschließend $w := z$ für festes $z \in D_R(0)$.)