Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 5
Abgabe: 25.05.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $b > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$$

gilt, indem Sie zunächst den Cauchyschen Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm a$, $\pm a + ib$ $(a > 0)$ und die Funktion $f(z) = \exp(-z^2)$ anwenden.
(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass bei festem b die Integrale über die vertikalen Seiten für $a \to \infty$ gegen Null konvergieren, und benutzen Sie ohne Beweis die Identität $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

Aufgabe 2 (6+3+3+3=15 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Ist f eine auf Ω stetige und auf $\Omega - L$ holomorphe Funktion, so ist f schon auf ganz Ω holomorph.

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera.)

(b) Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge holomorpher Funktionen. Beweisen Sie: Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Ω gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so ist f holomorph auf Ω.

(c) Jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat dichtes Bild in $\mathbb{C}$, d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

(d) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gibt es zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen w_1 und w_2 mit

$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Aufgabe 3 (3+3+3+3=12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie:

(a) Ist $C > 0$ und gilt

$$|f(z)| \leq C|p(z)| \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda p$.

(b) Gibt es Konstanten $R > 0$ und $C > 0$, so dass (1) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

(c) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D_R(z_0)} \subset U$. Sei $\delta \in (0, R)$. Zeigen Sie, dass

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Rn!}{\delta^{n+1}} \max_{\partial D_R(z_0)} |f|.$$

für alle $z \in \overline{D_{R-\delta}(z_0)}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(d) Sei $D := D_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Beweisen Sie, dass dann auch $|f'(0)| \leq 1$ ist.

Aufgabe 4 (2+2+4=8 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$ gilt $f(0) = 1$ und $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ für $z \neq 0$.

(b) $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ lässt sich um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, die man üblicherweise in der Form $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$ ansetzt. Die Zahlen B_k mit $k \in \mathbb{N}$ nennt man Bernoulli-Zahlen.

(c) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die Bernoulli-Zahlen B_k und berechnen Sie $B_0, \ldots, B_4$. Zeigen Sie, dass $B_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.