Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 6
Abgabe: 01.06.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (4+4+4=12 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Entwicklungen:

(a) $z\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$ für alle $z \in D_\pi(0) - \{0\}$

(b) $\tan(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}$ für alle $z \in D_{\pi/2}(0)$.

(c) $\frac{z}{\sin(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}-2}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$ für alle $z \in D_\pi(0)$.

(*Hinweis:* Sie dürfen die Identitäten

$$\tan(z) = \cot(z) - 2\cot(2z), \qquad \cot(z) + \tan\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{\sin(z)}$$

ohne Beweis verwenden.)

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel gilt:

$$\sum_{l=1}^{n} l^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \sum_{l=2}^{k} \frac{B_l}{l} \binom{k}{l-1} n^{k+1-l}$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die beiden Summen

$$S_{n,k} := \sum_{l=1}^{n} l^k, \qquad E_n(w) := \sum_{l=0}^{n} \exp(lw)$$

und verwenden Sie die Potenzreihenentwicklung von $\exp(lw)$.)

Aufgabe 3 (3+3+3+3=12 Punkte)

Die sogenannten Bernoulli-Polynome $B_k(w)$ mit $k \in \mathbb{N}$ sind definiert durch die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{ze^{wz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(w)}{k!} z^k$$

in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Bernoulli-Polynome $B_k(w)$ sind Polynome vom Grad k.

(b) Für $k \geq 1$ und beliebige $w \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $B_k'(w) = kB_{k-1}(w)$.

(ii) $B_k(w+1) - B_k(w) = kw^{k-1}$.

(iii) $B_k(1-w) = (-1)^k B_k(w)$.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $$\int_{\partial D_4(0)} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3} dz.$$

(b) $$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos(z)} \sin(z^6+1) - z^2}{(z-7)^4} dz.$$