Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 7
Abgabe: 08.06.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Für alle $s > 0$ existiere ein $r > 0$ mit $|f(z)| \geq s$ für alle $z \in G$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial G) \leq r$. Zeigen Sie, dass f nicht holomorph sein kann.
(*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass f keine Nullstellen hat, und benutzen Sie das Maximumprinzip.)

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $R > 0$ und $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $0 \leq r < R$ sei

$$M(r) := \sup \{|f(z)|;\ z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = r\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $M : [0, R) \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend ist und dass M genau dann streng monoton wächst, wenn f nicht konstant ist.

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

Sei $f : \overline{D_1(0)} \to \mathbb{C}$ stetig, so dass $f|_{D_1(0)}$ holomorph ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial D_1(0)$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f hat eine Nullstelle oder f ist konstant.

(b) f hat nur endlich viele Nullstellen.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{R}[x, y]$ ein von Null verschiedenes reelles Polynom (in den Variablen x und y), sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist für alle $z \in G$

$$p(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)) = 0,$$

so ist f konstant.
(*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz über die Gebietstreue.)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz, und es gelte mit $M > 0, n \in \mathbb{N}, R > 0$

$$|f(z)| \geq M|z|^n \quad \forall |z| \geq R.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\geq n$.