Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Funktionentheorie (SS 2022)
Blatt 8
Abgabe: 15.06.22, 11 Uhr, online

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$ auf Ω genau dann gilt, wenn eine offene Menge $\emptyset \neq U \subset \Omega$ existiert mit $f \equiv 0$ auf U.

Aufgabe 2 (4+6=10 Punkte)

(a) Beweisen Sie Satz 6.4 aus der Vorlesung.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie die folgenden Aussage: Hat f im Inneren ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

Aufgabe 3 (4+6=10 Punkte)

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$ auf G. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(z) = g(z) + ci$ für alle $z \in G$.

(b) Sei $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{Re} f(z) \geq \operatorname{Re} f(0)$ für alle $z \in D_1(0)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $R > 1$ und $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \pi\left(f(0) + \frac{f'(0)}{2}\right)$$

gilt.