Literatur zur Funktionentheorie (* = gut!)

0.) G. Schmieder, Grundkurs Funktionentheorie, Teubner 1993

* 1) Conway, Functions of one complex variable. Springer Graduate Text

* 2) Lang, Complex analysis. Springer Graduate Text

3) Fischer - Lieb, Funktionentheorie. Vieweg

4) Behnke - Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer

5) Remmert, Funktionentheorie 1, 2 Springer

6) Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie. Springer

7) Peschl, Funktionentheorie. BI

8) Cartan, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrer komplexer Veränderlicher. BI

* 9) Ahlfors, Complex Analysis. Mc Graw Hill

andere Themen:

10) Forster, Lectures on Riemann Surfaces. Springer

11) Hörmander, Complex analysis in several variables. North - Holland

FUNKTIONENTHEORIE

Saarbrücken SS 95 / SS 05

Einleitung:

Als Funktionentheorie bezeichnet man die Theorie der komplex differenzierbaren ("holomorphen") Funktionen $f: \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$, d.h. an jeder Stelle $z_0 \in G$ existiert der Grenzwert (G offen)

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Schreibt man $z = x + iy$, $f = u + iv$, so stellt man fest

f holomorph $\Longrightarrow$ f ist reell differenzierbar (als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$).

Darüberhinaus gelten die

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,

so daß Holomorphie viel stärker ist als nur reelle Differenzierbarkeit.

Die Vorlesung macht nun Aussagen über die besondere Struktur von holomorphen Funktionen, z.B. werden wir zeigen:

> Holomorphe Funktionen besitzen lokal (konvergente) Potenzreihenentwicklungen, sind also komplex analytisch.

Insbesondere können sich die Nullstellen nicht im Innern von G häufen außer für $f \equiv 0$.

Der

Fundamentalsatz der Algebra : Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, ein nicht konstantes Polynom, so hat f zumindest eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.

beispielsweise zeigt, wie man in der Funktionentheorie elegant argumentieren kann, um obiges Ergebnis zu beweisen.

Idee: f hat keine Nullstelle $\Longrightarrow$ $g(z) := 1/f(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und dort holomorph (da ja f holomorph ist und die übliche Quotientenregel für die Ableitung gilt)

Der Satz von Liouville besagt:

> $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt
> $\Longrightarrow$ γ konstant

Offenbar ist $1/f$ beschränkt ($\frac{1}{|f|} \sim |z|^{-n}$ für $a_n \neq 0$) und somit konstant. Dann ist f selbst konstant, was ja gerade ausgeschlossen wird.

Der Liouville-Satz, den man in obiger Argumentation benutzt, wird sich ohne besonderen Aufwand im Rahmen unserer Theorie ergeben.

In Analysis I (Satz 9.9) haben wir den Fundamentalsatz der

Algebra bereits kennengelernt : dort haben wir uns überlegt, daß die reelle Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto |f(z)|$ an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ ihren minimalen Wert annehmen muß und dann mit viel Kleinarbeit $f(z_0) = 0$ bewiesen.

Begründer: Cauchy, Weierstraß

Die Funktionentheorie mit ihren "klassischen" aus dem ~~vorigen~~ 19ten Jahrhundert stammenden Sätzen gehört zum unverzichtbaren Grundwissen jedes Mathematikers denn Anwendungen finden sich in fast allen Bereichen der Mathematik sowie vornehmlich in der Physik

Topologie / Geometrie : Riemannsche Flächen, Minimalflächen in $\mathbb{R}^3$, komplexe Differentialgeometrie (Kähler Mannigfaltigkeiten) ~~→ [illegible]~~

Algebra / Zahlentheorie : Zetafunktion, Primzahlverteilung

Partielle Differentialgleichungen in der Ebene

Elektrostatik : Beschreibung zweidimensionaler Felder durch sog. konforme Abbildungen

Elastizitätstheorie : Verhalten elastischer Stäbe und Platten

Real- und Imaginärteil holomorpher Fkten sind harmonisch ▽

Darüberhinaus liefert der Residuensatz ein sehr brauchbares Element zur Berechnung uneigentlicher reeller Integrale.

Die klassische Funktionentheorie dieser Vorlesung geht im wesentlichen auf Cauchy und Weierstraß zurück und kommt ohne große Vorkenntnisse aus. Wir benötigen:

- Definition und algebraische Eigenschaften der Menge $\mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ als metrischer Raum $\mathbb{R}^2$: Euklidische Abstandsmessung und die damit verbundenen topologischen Grundbegriffe
- Konvergenz von Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$
- Stetigkeit von Funktionen $f: \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$ sowie das Konzept der reellen Differenzierbarkeit, wenn man f als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ ansieht
- Komplexe Potenzreihenfunktionen

Es handelt sich bei den genannten Punkten entweder um Spezialfälle allgemeiner Aussagen über $\mathbb{R}^n$ bzw. über Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oder um Tatsachen, die wir im Rahmen unseres bisherigen Zusammentreffens mit $\mathbb{C}$ in der Grundvorlesung Analysis I–III bereits kennengelernt haben. Trotzdem möchte ich zu Beginn diese Grundlagen kurz zusammenstellen.

§ 0 Algebraische und metrische Struktur der komplexen Ebene

(Bem.: Zitate beziehen sich auf meine Vorlesung Analysis I-III)

$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ Menge der komplexen Zahlen

Addition: $(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$

Multiplikation: $(x,y) \cdot (u,v) = (x \cdot u - y v, \; x v + y u)$

Feststellung: $\begin{cases} (\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ ist Körper} & \text{(vgl. § 4)} \\ (0,0) \text{ neutral bzgl. } +, \\ (1,0) \quad " \quad \text{bzgl. } \cdot \end{cases}$

$z = (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$

Notation: <u>imaginäre Einheit</u> $i = (0,1)$

$\Rightarrow i^2 = (-1,0)$

<u>Identifikation</u>: $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ ist bijektiv

$\mathbb{R} \times \{0\}$ ist Teilmenge von $\mathbb{C} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ kann mit $(x,0) \in \mathbb{C}$ identifiziert werden

Dann gilt | $\mathbb{C} \ni z = (x,y) = (x,0) + (0,y) =$

$(x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + i y$.

Man hat jetzt $i^2 = -1$ und

$$(x+iy)(u+iv) = xu + xiv + iyu + i^2 yv =$$

$$xu - yv + i(xv + yu)$$

wie gewohnt.

<u>Notation</u>: Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$).

1) $x = \mathrm{Re}\, z$ Realteil, $y = \mathrm{Im}\, z$ Imaginärteil

z rein reell $\iff \mathrm{Im}\, z = 0$

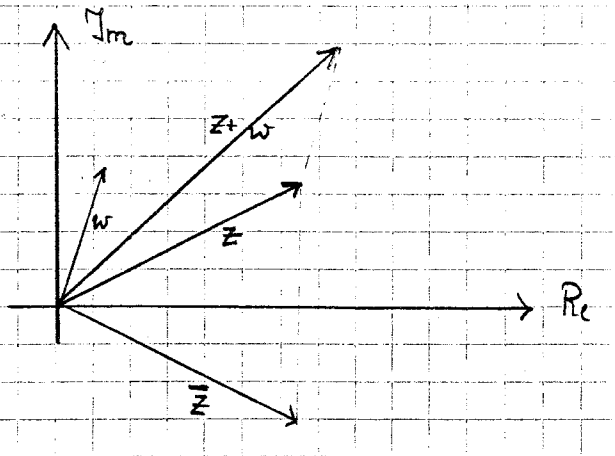
z rein imaginär $\iff z \neq 0$, $\mathrm{Re}\, z = 0$.

2) $\overline{z} := x - iy$ <u>Konjugation</u>

<u>Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene</u>

"+" ist Addition von Vektoren,

$\overline{z}$ bedeutet Spiegelung an der reellen Achse.



<u>Abstandsmessung</u>: $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x+iy$,

ist die Euklidische Norm von z und mißt den Abstand von z zu 0

induzierte Metrik: $d(z,w) = |z-w|$

Eigenschaften : i) $z\,\overline{z} = |z|^2 \underset{z\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

iii) $|zw| = |z|\,|w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis von ii) : Sei $z+w \neq 0$, sonst trivial. $\Longrightarrow$

$$1 = \frac{z}{z+w} + \frac{w}{z+w} \underset{Re}{\Longrightarrow} 1 = Re\left(\frac{z}{z+w}\right) + Re\left(\frac{w}{z+w}\right),$$

da $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Beachte

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$|Re\,\xi| \leq |\xi| \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \left|Re\,\frac{z}{z+w}\right| + \left|Re\,\frac{w}{z+w}\right| \leq \left|\frac{z}{z+w}\right| + \left|\frac{w}{z+w}\right|$$

$$= \frac{|z|}{|z+w|} + \frac{|w|}{|z+w|}.$$

□

$D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r

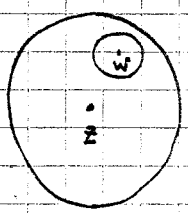
$\varepsilon > 0$ "klein" : $D_\varepsilon(z_0)$ = ε-Umgebung von z_0

$U \subset \mathbb{C}$ Umgebung von $z_0 \iff \exists\, \varepsilon > 0 : U \supset D_\varepsilon(z_0)$

Die nachfolgenden topologischen Begriffsbildungen sind Spezialfälle allgemeiner Konzepte in metrischen Räumen (vgl. § 16):

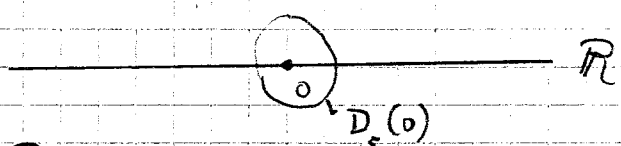
$G \subset \mathbb{C}$ offen $:\Longleftrightarrow$ G ist Umgebung jedes Punktes $z_0 \in G$ $\Longleftrightarrow$ zu jedem $z_0 \in G$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $D_\varepsilon(z_0) \subset G$

Beispiele: 1) $D_r(z)$ ist offen



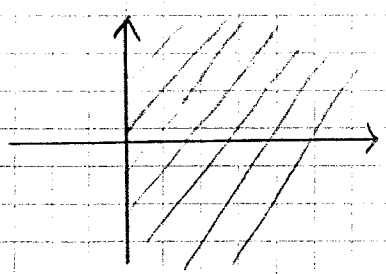
2) $\mathbb{C}$, $\emptyset$ sind offen

3) $\mathbb{R}$ ist nicht offen:



jede ε-Umg. von z.B. $0 \in \mathbb{R}$ enthält ja Punkte $\notin \mathbb{R}$, z.B. $\frac{\varepsilon}{2} \cdot i$.

4) $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \}$ (rechte Halbebene) ist offen, auch die obere Halbebene $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$.



$A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen $:\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C} - A$ offen

z.B. $\emptyset$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ alle abgeschlossen,

$\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$, $\{ z : \operatorname{Re} z \geqslant 0 \}$

offener Kern (das Innere) von $A \subset \mathbb{C}$:

$$\mathring{A} := \bigcup \{ U \subset A : U \text{ offen} \}$$

abgeschlossene Hülle (der Abschluß) von $A \subset \mathbb{C}$:

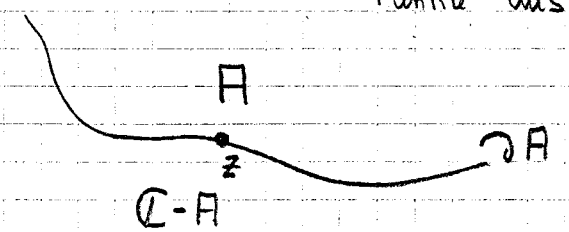
$$\overline{A} := \bigcap \{ K \supset A : K \text{ abgeschlossen} \}$$

(der Querstrich über A hat nichts (!) mit der komplexen Konjugation zu tun.

Rand von A: $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$.

(beachte: $\mathring{A}$ offen, $\overline{A}$, ∂A abgeschlossen)

Es gilt: $z \in \partial A \iff$ jede ε-Umgebung um z enthält sowohl Punkte aus A als auch aus $\mathbb{C} - A$



Beispiele: 1) $\overline{D_r}(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$

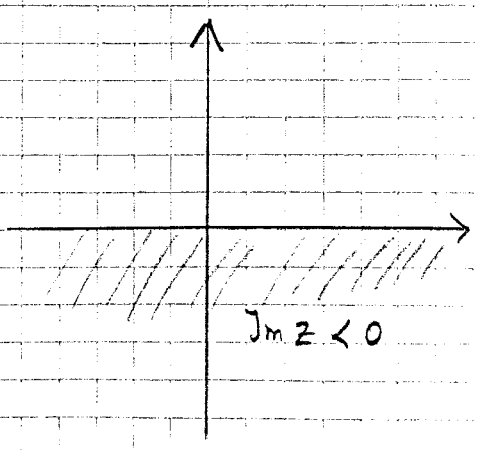
$\partial D_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$ Kreislinie um z_0 mit Radius r

$\mathring{D}_r(z_0) = D_r(z_0)$

2) Sei $H = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0 \}$

$\overline{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0 \}$,

$\mathring{H} = H$, $\partial H = \mathbb{R}$.



Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}$:

Def: $z = \lim_{n\to\infty} z_n :\iff \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon$ mit $z_n \in D_\varepsilon(z)$ für $n \geq N_\varepsilon$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Im}\, z \end{cases} \text{ in } \mathbb{R}$$

$\iff |z_n - z| \longrightarrow 0$ in $\mathbb{R}$

Bem: ① $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy Folge konvergiert.

② Bolzano-Weierstraß: $\{z_n\}$ beschränkte Folge, d.h. $|z_n| \leq M$ für ein $M \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\{z_n\}$ hat eine konvergente Teilfolge.

③ Sei $K \subset \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

i) K ist (überdeckungs-) kompakt

ii) K ist beschränkt und abgeschlossen

iii) jede Folge $\{z_n\}$ in K hat eine in K konvergente Teilfolge $\{z'_n\}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} z'_n$ existiert und gehört zu K.

④ $z_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n$,

falls existent.

Komplexe Funktionen

sind per Definition Abbildungen $f : M \to \mathbb{C}$ mit $M \subset \mathbb{C}$.

i) f stetig in $z_0 \in M \iff$

$f(z_n) \to f(z_0)$ für jede Folge $z_n \to z_0$, $z_n \in M$

ii) Sei $z_0 \in \overline{M}$, und es gibt zumindest eine Folge $w_n \in M - \{z_0\}$ mit $w_n \to z_0$, d.h. z_0 ist ein Häufungspunkt von M

Die komplexe Zahl γ heißt Grenzwert von f bei $z \to z_0$, wenn für jede Folge $\{w_n\} \subset M - \{z_0\}$ mit $w_n \to z_0$ gilt: $f(w_n) \to \gamma$. Man schreibt: $\gamma = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

Bem: 1) $z_0 \in M$ Häufungspunkt von M, f stetig in $z_0 \Longrightarrow$

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

2) Wir brauchen das Grenzwertkonzept zur Definition der komplexen Ableitung.

Beispiele: Die folgenden Funktionen sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig.

$f(z) \equiv c$ mit $c \in \mathbb{C}$ (konstante Funktion)

$f(z) = z$ (Identität)

$f(z) = \overline{z}$ (Konjugation)

$f(z) = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$

Komplexe Polynome: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

rationale Funktionen: $R(z) = P(z)/Q(z)$ mit Polynomen P, Q.

Es gelten die üblichen Rechenregeln für stetige Funktionen, ferner sieht man

$f: M \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow |f|, \overline{f}, \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f$ stetig auf M,

wobei die Funktionen rechts punktweise erklärt werden.

3V → „totale Ableitung"

Reelle Differenzierbarkeit: $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f: G \to \mathbb{C}$,

f reell diff'bar in z_0 heißt: $\Leftrightarrow$ es gibt eine lineare Abbildung

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|} \left| f(z) - f(z_0) - L(z - z_0) \right| = 0$$

(vgl. § 18, Def. 18.3)

Hier werden komplexe Zahlen wieder als Vektoren in $\mathbb{R}^2$ angesehen: $L(z - z_0)$ heißt Anwendung der linearen Abbildung L auf den Vektor $z - z_0$.

Bem: 1) f diff'bar in $z_0 \Rightarrow f$ stetig in z_0

2) $f = u + iv$ diff'bar in $z_0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(z_0), \frac{\partial u}{\partial y}(z_0), \frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$

existieren und $L = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(z_0)$, hier $z = (x,y) = x+iy$.

3) umgekehrt:

$\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$ existieren auf einer Umgebung von z_0 und sind in z_0 stetig $\Rightarrow$

$\Downarrow$ diff'bar in z_0 (Satz 18.4 + Anmerkung)

Beispiel: 1) $f(z) = \overline{z} = x - iy$, $u(z) = x$, $v(z) = -y$

$\Rightarrow \partial_x u(z) \equiv 1$, $\partial_y u(z) \equiv 0$, $\partial_x v(z) \equiv 0$, $\partial_y v(z) \equiv -1$

$\Rightarrow f$ ist an jeder Stelle reell differenzierbar mit

$$Df(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

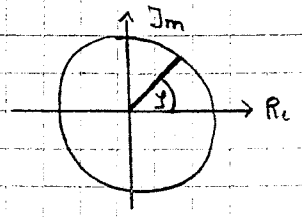
2) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{= u(z)} + \underbrace{2ixy}_{= iv(z)}$

$\partial_x u(z) = 2x$, $\partial_y u(z) = -2y$, $\Rightarrow$ (Bem 3)

$\partial_x v(z) = 2y$, $\partial_y v(z) = 2x$

$$Df(z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Polarkoordinaten / Formeln für die Einheitswurzeln (vgl. §8)



$\Phi : [0, 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \Phi(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

ist Bijektion

Umkehrfunktion $\Phi^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ heißt Argumentfunktion; für $|z| = 1$ ist $\arg(z)$ der Winkel zwischen dem Vektor z und der positiven reellen Achse.

Def: Komplexe Exponentialfunktion (→ §8)

$$\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

bekannt: ① die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

② auf $\mathbb{R}$ ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die "alte" Exponentialfunktion

(Satz 8.7) → ③ $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

→ ④ $\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

⑤ exp ist $2\pi i$-periodisch

ad ③: Cauchy Produktformel für unendliche Reihen

ad ④: zerlege die Reihe für $\exp(ix)$ in Re und Im; es ergibt sich die Cosinus- bzw. Sinusreihe

ad ⑤: benutze ③, ④

Mit diesen Notationen ist

$$\Phi(\vartheta) = e^{i\vartheta}, \quad 0 \le \vartheta < 2\pi$$

und

$$z = e^{i \arg z}, \quad |z| = 1$$

Ist $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, so gilt $z = |z| \frac{z}{|z|} = |z| e^{i \arg\left(z/|z|\right)}$,

und man nennt

$$z = r e^{i\vartheta} = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

$$r = |z|, \ \vartheta = \arg\left(\tfrac{z}{|z|}\right), \ r > 0, \ \vartheta \in [0, 2\pi)$$

die Polarkoordinatendarstellung von z. Nach dem Gesagten ist

$$(0,\infty) \times [0, 2\pi) \ni (r, \vartheta) \mapsto r e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} - \{0\}$$

eine Bijektion (läßt man $r = 0$ zu, so bekommt man eine Bijektion auf $\mathbb{C}$).

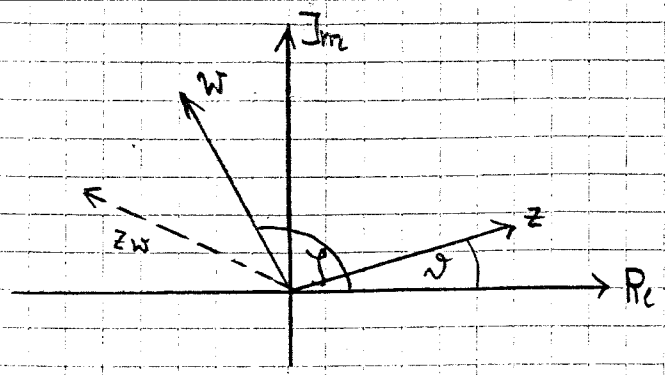
Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$:

Seien $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = r e^{i\vartheta}$, $w = R e^{i\gamma}$ $\Longrightarrow$

$$z w = rR e^{i(\vartheta + \gamma)}$$

" Multiplikation der Längen und Addition der Winkel "

Spezialfall: $1 = r = R$ $\Rightarrow$ Multiplikation kann graphisch im "Zeiger-diagramm" ausgeführt werden



Für $a \in \mathbb{C}$, $a = |a| e^{i\alpha}$, ist deshalb die Funktion

$$f : \mathbb{C} \ni z \mapsto az \in \mathbb{C}$$

eine <u>Drehstreckung</u>: man streckt z mit dem Faktor $|a|$ und dreht danach um α.

Die komplexe Exponentialfunktion ermöglicht einen trivialen Beweis der

<u>Formel von de Moivre</u>:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \quad \forall\, n, \varphi$$

denn: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \ldots.$

Außerdem kann man mit ihrer Hilfe <u>das Problem der</u>

<u>n^{ten} Einheitswurzeln</u>

direkt lösen:

<u>Finde alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$, wobei $n \in \mathbb{N}$.</u>

Das sind genau die Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^n - 1$, nach dem Fundamentalsatz gibt es höchstens n verschiedene Lösungen.

Offenbar: jede Lösung liegt auf der 1-Kreislinie um 0.

Setze $$z_k = e^{i \frac{k}{n} \cdot 2\pi}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\Rightarrow \quad z_k^n = e^{i k 2\pi} = e^0 = 1,$$

($2\pi i$-Periodizität)

$z_0, \ldots, z_{n-1}$ sind voneinander verschieden

(die Punkte bilden die Ecken eines regulären n-Ecks)

Allgemeiner: $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \geq 1$: $z^n = a$

Schreibe $a = r e^{i\omega}$, $\omega \in [0, 2\pi)$, $r = |a|$, und setze an

$$z = \rho e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r},$$ und wenn z die Gleichung löst, muß gelten:

$$e^{i\omega} = e^{i n \alpha}$$

D.h.: $$n\alpha = k 2\pi + \omega \iff \alpha = \frac{\omega}{n} + \frac{k}{n} 2\pi.$$

"Nun zeige":

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \exp\left(i \left(\frac{\omega}{n} + \frac{k}{n} 2\pi\right)\right),$$
$$k = 0, \ldots, n-1$$

sind genau die n verschiedenen Lösungen von $z^n = a$.

§ 1 Holomorphe Funktionen

Im Körper $\mathbb{C}$ hat man die Division, kann also Differenzenquotienten bilden, und hat somit eine Alternative zum Konzept der reellen Diff'barkeit für Funktionen $\mathbb{R}^2 \supset \to \mathbb{R}^2$: man benutzt dieselbe Definition wie für Funktionen $\mathbb{R} \supset \to \mathbb{R}$

DEF 1.1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$, $f: G \to \mathbb{C}$ heißt an der Stelle z_0 differenzierbar (genauer: komplex diff'bar), falls $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ in $\mathbb{C}$ existiert. Diese Zahl heißt die Ableitung von f in z_0, Bezeichnung: $f'(z_0)$.

Man nennt f auf G holomorph, wenn $f'(z)$ für alle $z \in G$ existiert. $f': G \to \mathbb{C}$ heißt Ableitungsfunktion.

Beispiele: 1) $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$

denn: $\frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0 \xrightarrow[z \to z_0]{} 2z_0$

2) entsprechend: $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(z) = n z^{n-1}$

3) $f(z) = \bar{z}$ ist in 0 nicht $\mathbb{C}$-diff'bar:

$z_n = 1/n \to 0$ und $\frac{f(z_n)}{z_n} = 1$

$w_n = i \cdot \frac{1}{n} \to 0$ und $\frac{f(w_n)}{w_n} = -1$

$\Rightarrow$ $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$ existiert nicht!

Aber: $f(z)$ ist überall reell differenzierbar

($f(z) = \overline{z}$ ist an keiner Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar: $z_n = z_0 + \frac{1}{n}$, $w_n = z_0 + i\frac{1}{n}$)

alternativ: benutze Zshg. zwischen reeller u. kompl. Abl. $\rightsquigarrow$ n.u.

Wörtlich wie für Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beweist man

Rechenregeln für die $\mathbb{C}$-Ableitung:

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$, $g: G \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$

$f+g$, λf, $f \cdot g$, f/g (wenn $g(z_0) \neq 0$)

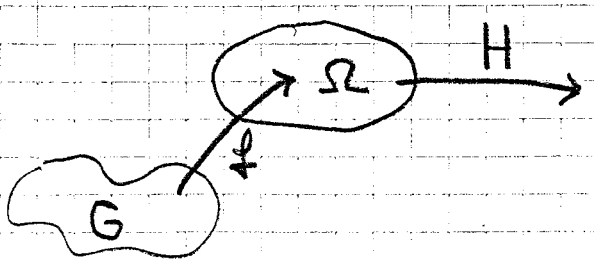
komplex diff'bar in z_0 mit

$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$,

$(f \cdot g)'(z_0) = f(z_0) g'(z_0) + f'(z_0) g(z_0)$,

$(f/g)'(z_0) = g^{-2}(z_0) \{ f'(z_0) g(z) - g'(z_0) f(z_0) \}$.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f(G) \subset \Omega$ und $H: \Omega \to \mathbb{C}$ komplex diff'bar in $f(z_0) \Longrightarrow H \circ f: G \to \mathbb{C}$ ist in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar mit $(H \circ f)'(z_0) = H'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.



↑ Kettenregel

Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Ableitung

(zuvor noch eine Randbemerkung: in der Literatur hat "holomorph" oftmals eine stärkere Bedeutung, manche Autoren verlangen zusätzlich die Stetigkeit von f' oder sagen holomorph nur dann, wenn f eine Potenzreihenentwicklung (lokal um jeden Punkt) besitzt; wir werden später zeigen, daß alle Begriffe gleichwertig sind)

SATZ 1.1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar. Dann ist f im reellen Sinn total differenzierbar.

Beweis: Wir definieren zunächst eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als Kandidaten für $Df(z_0)$ (reelle Ableitung).

Sei $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$ mit $f'(z_0) = a + ib$

folgt

$$f'(z_0) \cdot v = (a+ib)\cdot(\alpha+i\beta) =$$

($\cdot$: Mult. in $\mathbb{C}$)

$$(a\alpha - b\beta) + i(b\alpha + a\beta) =$$

$$(a\alpha - b\beta,\ b\alpha + a\beta) =$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =: L(v),$$

wenn L die durch $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung ist.

Wir wissen $\frac{1}{z-z_0}\left(f(z)-f(z_0)\right) \xrightarrow[z\to z_0]{} f'(z_0)$,

d.h. $\frac{1}{z-z_0}\left[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot(z-z_0)\right] \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$

$\Longrightarrow \frac{1}{|z-z_0|}\left|f(z)-f(z_0)-L(z-z_0)\right| \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$

Das ist gerade die Df. der $\mathbb{R}$-Ableitung, also $Df(z_0)=L$.

Gemäß $Df(z_0)=\begin{pmatrix}\partial_x \mathrm{Re}\, f & \partial_y \mathrm{Re}\, f\\ \partial_x \mathrm{Im}\, f & \partial_y \mathrm{Im}\, f\end{pmatrix}(z_0)$

folgt aus der Struktur von L:

$*$ $\boxed{\begin{aligned}\partial_x \mathrm{Re}\, f(z_0) &= \partial_y \mathrm{Im}\, f(z_0),\\ \partial_x \mathrm{Im}\, f(z_0) &= -\partial_y \mathrm{Re}\, f(z_0).\end{aligned}}$ Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

□

8.5.95 (4V)

↳ Man sieht: Komplexe Differenzierbarkeit ergibt nicht nur reelle (totale) Diff'barkeit, zusätzlich hat die Jacobi-Matrix eine spezielle Struktur, wie sie in $*$ zum Ausdruck kommt. Tatsächlich ergibt unser Beweis:

KOROLLAR: Äquivalent sind

(i) f $\mathbb{C}$-diff'bar in z_0 $\quad *$

(ii) f $\mathbb{R}$-diff'bar in z_0 + Cauchy-R. Dglen

Etwas geometrischer formuliert lautet diese Aussage:

f in z_0 (total) reell diff'bar, $Df(z_0)$ Drehstreckung

$\Rightarrow$ f in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (linear) heißt Drehstreckung, wenn L auf $v \in \mathbb{R}^2$ so wirkt, daß v um einen Faktor $r \geq 0$ gestreckt und danach um den Winkel φ gedreht wird, also

$$L = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Diese Struktur von L implizit natürlich $*$, und wenn $*$ gilt, kann man der Funktionalmatrix diese Gestalt geben mit der Wahl

$$r = \sqrt{(\partial_x \mathrm{Re}\, f(z_0))^2 + (\partial_x \mathrm{Im}\, f(z_0))^2}$$

und φ geeignet definiert.

Aus dem Zusammenhang

$$f'(z_0) \cdot v = \overbrace{\begin{pmatrix} \partial_x \mathrm{Re}\, f(z_0) & \partial_y \mathrm{Re}\, f(z_0) \\ \partial_x \mathrm{Im}\, f(z_0) & \partial_y \mathrm{Im}\, f(z_0) \end{pmatrix}}^{\text{reelle Jacobi-Matr.}} v$$

($\cdot$: Mult. in $\mathbb{C}$)

ergibt sich mit Wahl $v = (1,0) = 1$

$$f'(z_0) = \left(\partial_x \mathrm{Re}\, f(z_0),\ \partial_x \mathrm{Im}\, f(z_0)\right) =$$

$$\partial_x \mathrm{Re}\, f(z_0) + i\, \partial_x \mathrm{Im}\, f(z_0).$$

Benutzt man nun noch die Cauchy-R. Dglen, so läßt sich $f'(z_0)$ auf verschiedenen Wegen als Kombination partieller Ableitungen von Re, Im in z_0 schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z_0) &= \partial_x \mathrm{Re}\, f(z_0) + i\, \partial_x \mathrm{Im}\, f(z_0) = \partial_x f(z_0) \\ &\partial_y \mathrm{Im}\, f(z_0) - i\, \partial_y \mathrm{Re}\, f(z_0) = -i\, \partial_y f(z_0) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z_0) - i\, \partial_y f(z_0)\right) = f'(z_0)$$

KOROLLAR: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$.

Existieren dann $\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v$ auf Ω, sind die part. Ableitungen dort stetig und gelten die Cauchy-R. Dglen., so ist f **holomorph.**

(Bem: kann man auf die Stetigkeit von $\partial_x u \ldots$ verzichten?)

→ einfache Aussagen über holom. Fkten

Notation: Eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt ein _Gebiet_, wenn man je zwei Punkte $P, Q \in G$ durch eine stetige Kurve verbinden kann.

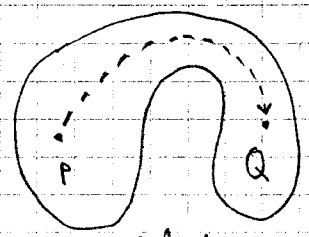
Das ist gleichwertig mit

(i) beliebige Punkte in G kann man durch einen Streckenzug verbinden

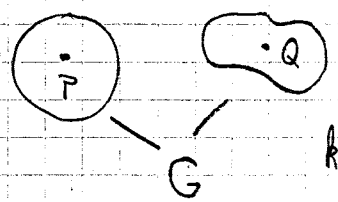
oder

(ii) ..... durch eine stetig differenzierbare Kurve ...

Zum Beweis benutze man geeignete Approximationssätze. Gebiete sind Spezialfälle sogenannter zusammenhängender Mengen.



Gebiet



kein Gebiet!

SATZ 1.2: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' \equiv 0$ auf G. Dann ist $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Beweis: Es gilt

$$f'(z) = \partial_x \operatorname{Re} f(z) + i\, \partial_x \operatorname{Im} f(z)$$

$$= \partial_x \operatorname{Re} f(z) - i\, \partial_y \operatorname{Re} f(z),$$

also: $\partial_x \operatorname{Re} f,\ \partial_y \operatorname{Re} f \equiv 0$. Sei

$$u: G \to \mathbb{R}, \quad u := \operatorname{Re} f$$

Wir wiederholen jetzt eine Richtung von früher, die zeigt, warum G Gebiet sein muß.

$$\gamma(0) = z_0, \quad \gamma(1) = z.$$

Dann ist

$$u(z) - u(z_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (u \circ \gamma)(t)\, dt,$$

denn $t \mapsto \frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) = \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ ← Skalarprodukt!

$$\equiv 0,$$

so daß man einen stetigen Integranden hat. Es folgt $u(z) = u(z_0)$, also $u \equiv \text{const}$. Aus Cauchy-Riemann folgt $\partial_x \operatorname{Im} f = \partial_y \operatorname{Im} f = 0$, so daß auch $\operatorname{Im} f$ konstant ist. □

Wie schon erwähnt werden wir später zeigen, daß Holomorphie eine sehr weitreichende Eigenschaft ist: holomorphe Funktionen sind komplex analytisch. Hier diskutieren wir zunächst nur die einfache Richtung

> "komplex analytisch ⟹ holomorph"

und erinnern dazu an

Komplexe Potenzreihen und deren Konvergenzverhalten

(vgl. Analysis I, § 7 Satz 7.13 f.)

Man wähle $z_0 \in G$ beliebig, aber fest und verbinde $z \in G$ mit z_0 durch einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow G$, also

$$\gamma(0) = z_0, \quad \gamma(1) = z.$$

Dann ist

$$u(z) - u(z_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (u \circ \gamma)(t)\, dt,$$

denn $t \mapsto \frac{d}{dt}(u\circ\gamma)(t) = \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ (Skalarprodukt!)

$$\equiv 0,$$

so daß man einen stetigen Integranden hat. Es folgt $u(z) = u(z_0)$, also $u \equiv \text{const}$. Aus Cauchy-Riemann folgt $\partial_x \operatorname{Im} f = \partial_y \operatorname{Im} f = 0$, so daß auch $\operatorname{Im} f$ konstant ist. □

Wie schon erwähnt werden wir später zeigen, daß Holomorphie eine sehr weitreichende Eigenschaft ist: holomorphe Funktionen sind komplex analytisch. Hier diskutieren wir zunächst nur die einfache Richtung

"komplex analytisch $\Longrightarrow$ holomorph"

und erinnern dazu an

Komplexe Potenzreihen und deren Konvergenzverhalten

(vgl. Analysis I, § 7 Satz 7.13 f.)

Notationen : $A \subset \mathbb{C}$, $f_n, f : A \to \mathbb{C}$

1, $\{f_n\}$ konvergiert <u>punktweise auf A</u> gegen f $:\Leftrightarrow$

$$f_n(z) \to f(z) \quad \forall z \in A$$

2, $\{f_n\}$ konvergiert <u>gleichmäßig auf A</u> gegen f $:\Leftrightarrow$

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$$

3) Sei A <u>offen</u>; $\{f_n\}$ konvergiert <u>lokal</u> glm. gegen f $:\Leftrightarrow$

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad \forall K \text{ kompakt } \subset A$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ punktweise, gleichmäßig, lokal glm. konvergent

$:\Leftrightarrow \left\{\sum_{n=1}^{N} f_n\right\}$ $-\!/\!/-$

5) Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. <u>Die zugehörige Potenzreihe</u> $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ ist zunächst nur formal zu lesen, d.h. man muß prüfen, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Funktionenreihe konvergent ist

<u>Bem. + Bspl:</u> i) Gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen sind stetig, speziell sind gleichmäßige Limiten von Polynomen stetig.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergent (gegen $\frac{1}{1-z}$) genau

nur für $|z| < 1$.

iii) $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

iv) Kriterium für gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenreihen:

$$\begin{cases} f_k : A \to \mathbb{C}, \quad A \subset \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ |f_k(z)| \le \alpha_k \quad \forall z \in A \quad \text{mit } \alpha_k \ge 0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ gleichmäßig konvergent}$$

Beweis von iv): $\sup_{z \in A} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(z) - \sum_{k=0}^{m} f_k(z) \right| \overset{n>m}{=}$

$$\sup_{z \in A} \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(z) \right| \le \sup_{z \in A} \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \le \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \longrightarrow 0$$

bei $n, m \to \infty$

D.h.: $\left\{ \sum_{k=0}^{n} f_k \right\}$ ist glm. Cauchy-Folge auf A $\Longrightarrow$ §13

$\left\{ \sum_{k=0}^{n} f_k \right\}$ ist glm. konvergent $\square$

v) iv) angewendet auf iii) liefert lokal glm. Konvergenz der Reihe, also nach i) die Stetigkeit von exp.

Wir haben früher (→ Satz 7.13 + Bem. dazu) gezeigt

SATZ 1.3: Seien z_0 und $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

Entweder $\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \text{ konvergiert } \underline{\text{absolut}} \text{ und} \\ \underline{\text{lokal}} \text{ gleichmäßig auf ganz } \mathbb{C} \end{cases}$

oder $\begin{cases} \text{man findet ein } r \in [0,\infty), \text{ so daß} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \text{ auf } D_r(z_0) \text{ } \underline{\text{absolut}} \\ \text{und } \underline{\text{lokal}} \text{ gleichmäßig konvergiert und auf der} \\ \text{offenen Menge } \mathbb{C} - \overline{D_r(z_0)} \text{ } \underline{\text{divergiert}}. \end{cases}$

o) vgl. hierzu Schmieder, Satz 3.2

BEM: 1) Potenzreihen konvergieren immer auf Kreisscheiben, wobei diese ausgeartet ($\{z_0\}$ bzw. $\mathbb{C}$) sein können.

2) Absolute Konvergenz heißt: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z-z_0|^k < \infty$.

3) Sei $\rho := \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ $\Longrightarrow$

$\rho \begin{cases} = 0: & \text{Konvergenz auf } \mathbb{C} \\ = \infty: & \text{" nur in } z_0 \\ \in (0,\infty): & \text{" auf } D_{1/\rho}(z_0) \end{cases}$

(Dies haben wir übrigens schon bewiesen, man bekommt dies aus dem Wurzelkrit.)

4) Sei $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t-t_0)^k$ sei konvergent für ein reelles $t \neq t_0$ $\Longrightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-z_0)^k \text{ konvergiert absolut und lokal glm. auf} \\ \text{der Kreisscheibe } D_r(t_0),\ r := |t-t_0| > 0 \end{array} \right.$ ← wichtig!

(// Einsetzen komplexer Werte in reelle Reihen //)

5) Über das Verhalten am Rand des Konvergenzbereiches kann man keine allgemeingültige Aussage machen, in Analogie zu Satz 15.3 kann man beweisen (mit demselben Argument!)

SATZ 1.4 : Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

vorausgesetzt $|1-z| / (1-|z|)$ bleibt beim Grenzübergang beschränkt.

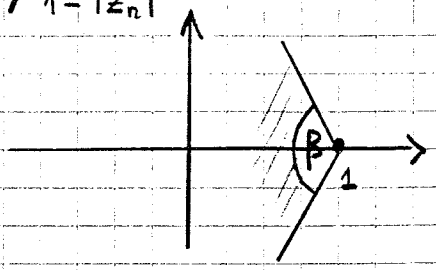
(die Pot.-reihe $\sum a_k z^k$ konvergiert ja in $z=1$)

Bem: i) Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ergibt nach Satz 1.3 zunächst die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $|z| < 1$

ii) Setzt man $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, so bedeutet obige Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(1)$$

gilt nur für solche Folgen $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, $z_n \to 1$, für die $|1-z_n| / (1-|z_n|)$ beschränkt bleibt.



Gilt $\beta < \pi$, so darf man z.B. den Grenzübergang $z \to 1$ im angedeuteten Winkelbereich ausführen.

□

Beweisskizze von Satz 1.5 $= f(z)$

SATZ 1.5: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ konvergent auf $D_r(z_0)$ mit $r > 0$. Dann ist die Potenzreihenfunktion dort holomorph mit Ableitung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1} = f'(z)$.

KOROLLAR: Die Potenzreihenfunktion ist beliebig oft auf $D_r(z_0)$ komplex (gliedweise) differenzierbar.

Beweisskizze (vgl. Conway, p. 36):

Sei o.E. $z_0 = 0$; für $|z| < r$ seien

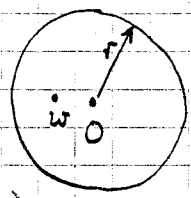
$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{k-1}, \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

und $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$.

Übung: Benutze einfach die Formel für den Konvergenzradius von p. 28/Bem. 5

g konvergiert auf $D_r(0)$ (Begründung!). Sei $w \in D_r(0)$ fixiert und $|w| < \rho < r$. (ρ wird so gewählt, dass ...) Wir zeigen: $\boxed{f'(w) = g(w)}$

für $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.



Sei $\delta > 0$ mit $D_\delta(w) \subset D_\rho(0)$ (δ wird später klein) und $z \in D_\delta(w) \Longrightarrow$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \left\{ \frac{S_n(z)-S_n(w)}{z-w} - S_n'(w) \right\} + \left\{ S_n'(w) - g(w) \right\} + \frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}$$

mit

$$\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w} = (z-w)^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(z^k - w^k\right)$$

und

$$\frac{|z^k - w^k|}{|z-w|} = |z^{k-1} + z^{k-2}w + z^{k-3}w^2 + \dots + w^{k-1}| \leq$$

$$k \cdot \rho^{k-1},$$

da $|w| < \rho$ und $D_\delta(w) \subset D_\rho(0)$, also auch $|z| < \rho$.

Also: $$\left| (z-w)^{-1} \left(R_n(z) - R_n(w)\right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, k \, \rho^{k-1}$$

(zeige o.o.): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent auf $D_r(0)$ $\Longrightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k t^{k-1}$ konvergent $\forall\, t < r$)

↑ Formel für den Konvergenzradius von p. 28 Bem 3

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle n_0 so, daß

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \cdot k \rho^{k-1} \leq \varepsilon/3, \quad |S_{n_0}'(w) - g(w)| \leq \varepsilon/3$$

Nun verkleinere man δ, so daß

$$\left| \frac{S_{n_0}(z) - S_{n_0}(w)}{z - w} - S_{n_0}'(w) \right| \leq \varepsilon/3 \quad \forall\, 0 < |z - w| < \delta.$$

Es folgt:

$$\left| \frac{1}{z-w} \left(f(z) - f(w) \right) - g(w) \right| \leq \varepsilon \quad \forall \quad \text{-//-}$$

□

Das Korollar folgt induktiv. Es ergibt sich

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1)\, a_k z^{k-n},$$

und die Potenzreihe rechts hat denselben Konvergenzradius wie f.

DEF 1.2: Sei G offen in $\mathbb{C}$. $f: G \to \mathbb{C}$ heißt komplex analytisch auf G, wenn es zu jedem $z_0 \in G$ ein $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset G$ und eine Folge $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{auf } D_r(z_0).$$

f ist also genau dann Komplex analytisch auf G, wenn man f lokal auf G durch konvergente Potenzreihen darstellen kann.

(Exkurs!)

SATZ 1.6: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ Komplex analytisch. Dann gilt:

i) f ist holomorph.

ii) Ist $\{z_n\}$ eine Folge in G mit $z_n \to a$ für ein $a \in G$ und gilt $f(z_n) = 0$ für alle n, ($z_n \neq a$), so ist $f \equiv 0$. (Identitätssatz)

iii) Ist $z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$, so ist $f \equiv 0$.

Beweis: i) ✓ ii) Satz 7.14 Analysis I[5] (Komplexe Taylorreihe)

iii) es gilt lokal bei z_0 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k$,

also $f \equiv 0$ auf einer Umgebung von z_0, nun benutze ii).

(Bem: aus $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ folgt direkt $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$)

(vgl. später Satz 3.12)

□

Ergänzung: Elementare Funktionen

schon bekannt

Exponentialfunktion: $\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$, $z \in \mathbb{C}$

$(\exp)' = \exp$, $e^{z+w} = e^z e^w$ $\forall z,w \in \mathbb{C}$

↖ Satz 1.5

Trigonometrische Funktionen:

$$\sin z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1}$$

$$\cos z := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu}$$

konvergent auf ganz $\mathbb{C}$ (Satz 1.3 + Konvergenzverhalten auf $\mathbb{R}$)

$\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ (Satz 1.5)

Formeln (nachrechnen!) (für $z \in \mathbb{R}$ klar!)

$$\begin{cases} \cos z + i \sin z = e^{iz} \\ \cos z - i \sin z = e^{-iz} \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ **Euler Formeln:**

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\cos^2 + \sin^2 \equiv 1$ auf $\mathbb{C}$

Die Euler Formeln ergeben die

Additionstheoreme:

$$\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$$

$$\sin(w+z) = \sin w \cos z + \sin z \cos w$$

denn

$$\cos(w+z) = \frac{1}{2}\left\{ e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{ e^{iz} e^{iw} + e^{-iz} e^{-iw} \right\}, \quad \cos w \cos z - \sin w \sin z =$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{iw} e^{iz} + e^{iw} e^{-iz} + e^{-iw} e^{iz} + e^{-iw} e^{-iz} \right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(e^{iw} e^{iz} - e^{iw} e^{-iz} - e^{-iw} e^{iz} + e^{-iw} e^{-iz} \right),$$

und die markierten Terme kürzen sich.

Nullstellenverhalten:

1) $e^z = 0 \iff e^x(\cos y + i \sin y) = 0 \iff$ ($e^x > 0$)

$\cos y + i \sin y = 0$, aber $|\cdot| = 1$

D.h.: **exp ist auf $\mathbb{C}$ ohne Nullstelle !**

2) $\sin z = 0 \iff \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 0 \iff e^{2iz} = 1$

$\iff e^{-2y}\, e^{2ix} = 1$

$z = x+iy$

Wegen $|e^{2ix}| = 1$ folgt $1 = e^{-2y}$, d.h. $\underline{y = 0}$.

Übrig bleibt $e^{2ix} = 1 \implies x \in \pi\mathbb{Z}$

Also: $\boxed{\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}}$!

3) beachte $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \cos z \implies$

$\boxed{\cos z = 0 \iff z \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}}$

sin und cos haben auf $\mathbb{C}$ nur die bekannten reellen Nullstellen, es gibt keine weiteren Nullstellen $\in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

Periodizität:

1) $e^{(z+2\pi i)} = e^{z}\, e^{2\pi i} = e^{z} \quad \forall z \implies$

exp ist periodisch mit Periode $2\pi i$

2) Eulr Formel $\implies \cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i[z+2\pi]} + e^{-i[z+2\pi]}\right) =$

$2\pi i$ Period. v. exp

$$= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z$$

3) und analog $\sin(z + 2\pi) = \sin z$

sin, cos sind periodisch mit Periode 2π

Tangens, Cotangens werden wie üblich erklärt

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \notin \pi\mathbb{Z}$$

} holomorph auf diesen Bereichen

Formeln: $\tan z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$, $\cot z = i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$

$$(\tan)'(z) = 1/\cos^2 z = 1 + \tan^2 z,$$

$$(\cot)'(z) = -1/\sin^2 z = -(1 + \cot^2 z)$$

tan, cot sind π-periodisch.

Hyperbelfunktionen: $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

$\Rightarrow \sinh z = \frac{1}{i}\sin(iz)$, $\cosh z = \cos(iz)$

Die Formeln zeigen: Auf $\mathbb{C}$ besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen den

Hyperbelfunktionen und den trigonometrischen Funktionen sin, cos.

Komplexe Logarithmen : Wir diskutieren das Problem der Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion. Es gilt

$$\text{Bild}(\exp) = \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\},$$

denn ist $w \in \mathbb{C}^*$, so kann man schreiben

$$w = |w| \cdot e^{i \arg \frac{w}{|w|}}$$

mit der Argumentfunktion $\arg : S^1 \to [0, 2\pi)$ (als Umkehrfunktion zu $t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$). Offenbar folgt

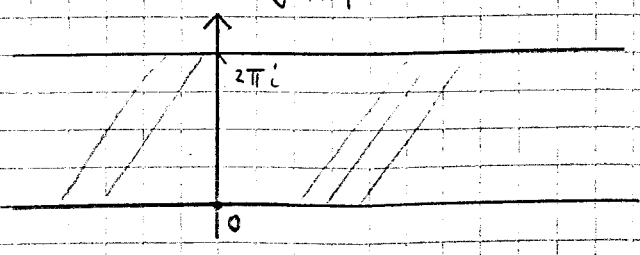
$$w = e^{\ln|w|} e^{i \arg \frac{w}{|w|}} = \exp\left(\ln|w| + i \arg \frac{w}{|w|} \right),$$

so daß man ein Urbild von w unter $\exp$ gefunden hat. Da $\exp$ $2\pi i$ periodisch ist, gilt auch

$$\boxed{w = \exp\left(\ln|w| + i \left[\arg \frac{w}{|w|} + k\, 2\pi \right] \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

Für $w \in \mathbb{C}^*$ ist $z := \ln|w| + i \arg \frac{w}{|w|}$ eine komplexe Zahl aus dem Streifen

$$S = \{ x+iy : x \in \mathbb{R},\ 0 \le y < 2\pi \},$$



und dieser Streifen wird durch exp bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet.

Gemäß
$$e^z = e^{\tilde{z}} \iff \tilde{z} = z + k\,2\pi i \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

kann man exp natürlich auch auf jedem anderen Horizontalstreifen der Breite 2π umkehren, d.h.

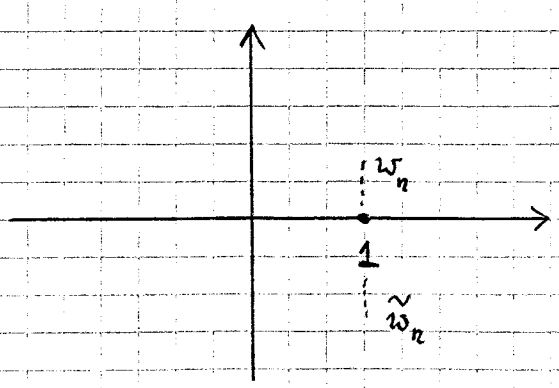
$$\exp \Big|_{\mathbb{R} + i\{y:\ a \le y < a + 2\pi\}}$$

ist für alle $a \in \mathbb{R}$ bijektiv mit Bild $= \mathbb{C}^*$

Wählen wir ein für allemal $a = 0$ und setzen

$$f : \mathbb{C}^* \to \{z:\ 0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi\}$$

für die Umkehrfunktion von $\exp \Big|_{\{z:\ 0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi\}}$. f ist nicht stetig:

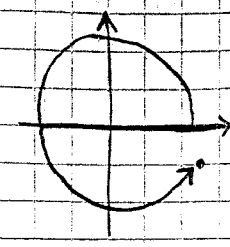


Sei $w_n := 1 + \frac{i}{n}$,

$\tilde{w}_n := 1 - \frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt $f(w_n) = \ln|w_n| + i \arg \frac{w_n}{|w_n|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 + i\,0 = 0$

und $f(\tilde{w}_n) = \ln|\tilde{w}_n| + i \arg \frac{1-\frac{i}{n}}{|1-\frac{i}{n}|}$



$\to 2\pi$,

also $\lim_{n\to\infty} f(\tilde{w}_n) = 2\pi i \neq \lim_{n\to\infty} f(w_n) = 0$.

Dasselbe Argument zeigt: f ist in jedem Punkt $(0,\infty) \subset \mathbb{C}$ unstetig. Um dies zu vermeiden - also stetige Logarithmen zu erzeugen - betrachtet man exp grundsätzlich nur auf den offenen Streifen $\{z \in \mathbb{C}: a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbb{R}$.

~ stellt $\log = \ln$ auf $\mathbb{R}^+$

DEF 1.3: Hauptzweig des komplexen Logarithmus $(a = -\pi)$

Es gilt: exp bildet $\{z \in \mathbb{C}: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ bijektiv ab auf $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Die Umkehrfunktion

$\mathbb{C} - (-\infty, 0]$

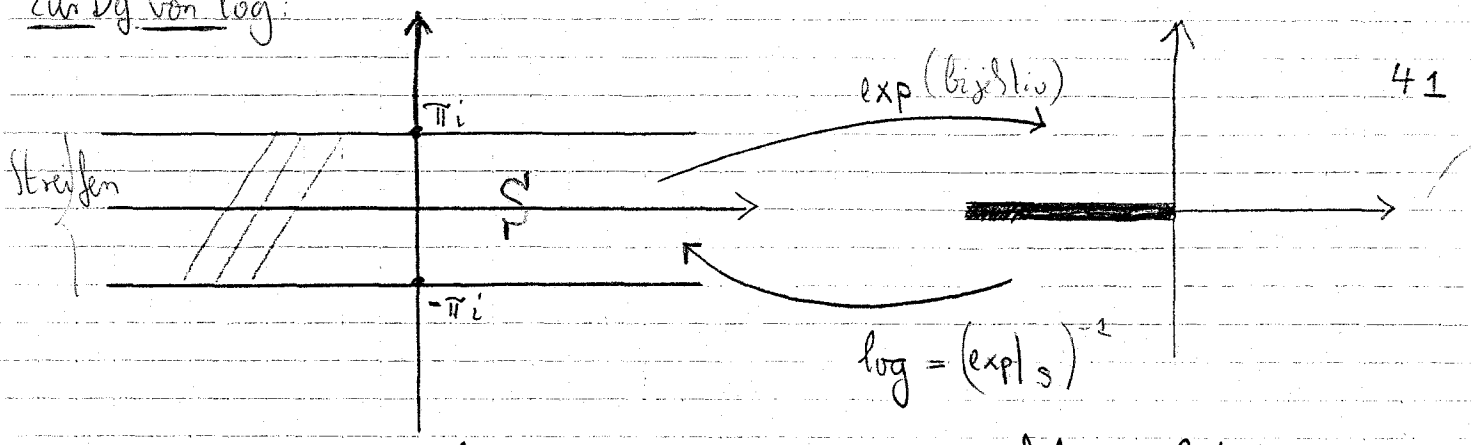
$\log: \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0\} \to \{z \in \mathbb{C}: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$

heißt Hauptzweig des Logarithmus. Es gilt

$$\log w = \ln|w| + i\, \odot\left(\arg \frac{w}{|w|}\right),$$

$$\odot(t) := \left\{ \begin{array}{ll} t, & t \in [0, \pi) \\ t - 2\pi, & t \in (\pi, 2\pi) \end{array} \right\} \in (-\pi, \pi).$$

zur Def von log:



15.5 ← bis Satz 2.2 einschließlich!

Eigenschaften: i) $w \in (0,\infty) \Rightarrow \log w = \ln w$

denn $\log w = \ln|w| + i \underbrace{\arg \frac{w}{|w|}}_{=0} = \ln|w| = \ln w$

Auf $(0,\infty)$ stimmen log und ln überein, das erklärt die Bezeichnung "Hauptzweig".

streichen
ii) Wir erläutern nochmals die Formel für $\log w$: Sei $w \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$, also $\arg \frac{w}{|w|} \neq \pi$. Dann gilt

$$\exp\left(\ln|w| + i \, \textcircled{\sim}\left(\arg \frac{w}{|w|} \right)\right) =$$

$$e^{\ln|w|} \; e^{i \, \textcircled{\sim}(\ldots)} = |w| \; e^{i \arg\left(\frac{w}{|w|}\right)},$$

denn für $\arg \frac{w}{|w|} \in (\pi, 2\pi)$ ist

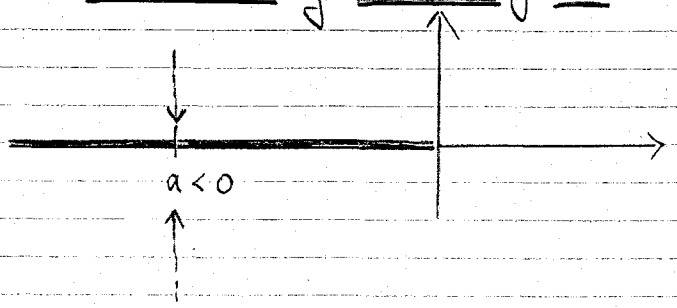
$$e^{i \, \textcircled{\sim}(\ldots)} = e^{-2\pi i} \; e^{i \arg \frac{w}{|w|}} = e^{i \arg \frac{w}{|w|}}$$

Per Def. von arg gilt $e^{i \arg \frac{w}{|w|}} = \frac{w}{|w|}$, also

$$\exp\left(\ln|w| + i \, \textcircled{\sim}\left(\arg \frac{w}{|w|} \right)\right) = w,$$

so daß $\ln|w| + i \odot \left(\arg \frac{w}{|w|}\right) = (\exp)^{-1} w$.]

~~iii)~~ ii) log springt um $2\pi i$ bei Annäherung an die negative reelle Achse



~~iii)~~
~~iv)~~

$$\log : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \longrightarrow \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

ist holomorph mit $\log' w = \frac{1}{w}$

Beweis: ~~v~~ iii) Sei $g(z) := e^z$, $z \in [-\pi < \operatorname{Im} z < \pi]$. Es gilt

$$g'(z) = g(z) ;$$

bezeichne $Dg(z)$ die reelle Ableitung von g bei z. Die Jacobi-matrix ist ~~v~~ also von der Form ($\subset$ C.R. Gln)

$$Dg(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\det Dg(z) = a^2 + b^2 = |g'(z)|^2 = |e^{2 \cdot z}| > 0$$

Nach dem reellen Umkehrsatz folgt: $\log = g^{-1}$ ist reell differenzierbar mit $Dg^{-1}(w) = (Dg(z))^{-1}$, $z = \log w$

Gemäß $Dg(z)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ sieht man, daß g^{-1} die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt, also holomorph ist.

Die Relation $(g^{-1})'(w) = \frac{1}{g'(z)} = \frac{1}{w}$ folgt aus dem Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Ableitung oder aus der komplexen Kettenregel.

Bem: (Einzelheiten → Übung !)

① Nebenzweige des Logarithmus:

$k \in \mathbb{Z} - \{0\}$: $\log_k w := \log w + 2\pi i k$

$\log_k : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \{z : (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi\}$

bijektiv

② Das Logarithmengesetz $\log(zw) = \log z + \log w$ gilt i.a. nicht !

(Beispiel !)

③ Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Def: Eine Logarithmusfunktion auf G ist eine holomorphe Funktion $L : G \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp \circ L = \mathrm{Id}_G$$

Zeige: Zwei Logarithmusfunktionen $L, \tilde{L} : G \to \mathbb{C}$ unterscheiden sich nur durch ein konstantes Vielfaches von $2\pi i$.

Problem: Auf welchen Gebieten $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$ gibt es Logarithmen?
→ Antwort später!

④ Sei $a \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$. Wie im Reellen definiert man die

Exponentialfunktion zur Basis a durch

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto a^z := \exp(z \log a) \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Die allgemeine Potenz z^ν ist für $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$

und $\nu \in \mathbb{C}$ dann

$$z^\nu = \exp(\nu \log z),$$

z. B. $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right)$, $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Auch hier gelten die üblichen "Potenzgesetze" nicht!

§2 Komplexe Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Notation:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt ein Integrationsweg, $a < b \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

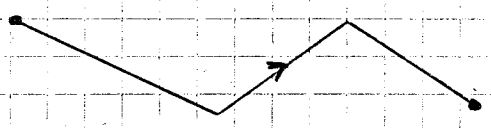
γ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar

Es gibt also eine Zerlegung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ von $[a,b]$, so daß γ auf (t_{k-1}, t_k) stetig differenzierbar ist. Außerdem sollen in jedem Teilpunkt t_k die einsätigen Grenzwerte

$$\lim_{t \downarrow t_k} \gamma'(t), \quad \lim_{t \uparrow t_k} \gamma'(t)$$

existieren. Diese müssen aber nicht gleich sein!

Beispiel: Streckenzug



Die Länge eines Integrationsweges ist

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,}$$

wobei $\gamma'(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\gamma(t) + i \frac{d}{dt} \operatorname{Im}\gamma(t)$ komponentenweise gebildet wird.

Das Integral existiert, da $|\gamma'|$ offenbar eine Regelfunktion ist.

Notationen:

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg.

i) γ glatt $:\Leftrightarrow$ γ stetig diff'bar

ii) γ <u>geschlossen</u> $:\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$

iii) γ <u>einfach geschlossen</u> $:\Leftrightarrow$ γ geschlossen und $\gamma|_{[a,b)}$ <u>injektiv</u>

iv) Spur $\gamma = \gamma([a,b])$
(die durch γ in $\mathbb{C}$ beschriebene Punktmenge)

z.B: ① $\gamma: [0,2\pi] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ positiv orientierte 1-Kreislinie
γ ist glatte, einfach geschlossene Kurve mit $L(\gamma) = 2\pi$

② $\gamma: [0,2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\cdot e^{it}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$

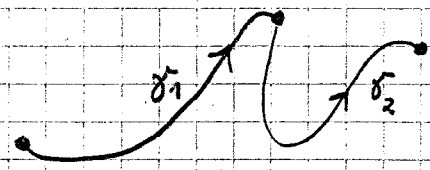
Kreis um z_0 mit Radius r

③ $\gamma: [0,1] \ni t \mapsto (1-t)z_1 + t z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Strecke von z_1 nach z_2

<u>Operationen mit Wegen</u>:

a) <u>Zusammensetzung</u>:



$\gamma_1: [a,b] \to \mathbb{C}$
$\gamma_2: [a,b] \to \mathbb{C}$
Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$

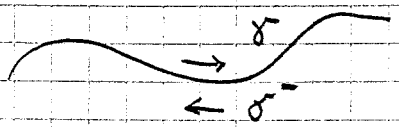
$$\gamma_1\gamma_2 : [a, 2b-a] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1\gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & a \le t \le b \\ \gamma_2(t+a-b), & t \in [b, 2b-a] \end{cases}$$

$$\text{Spur}(\gamma_1\gamma_2) = \text{Spur}\,\gamma_1 \cup \text{Spur}\,\gamma_2,$$

$$L(\gamma_1\gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

b) der entgegengesetzte Weg

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg



$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit

$\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$

$\Longrightarrow \quad L(\gamma) = L(\gamma^-)$, $\text{Spur}\,\gamma^- = \text{Spur}\,\gamma$

DEF 2.1 : Komplexes Kurvenintegral

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : \text{Spur}\,\gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Das Kurvenintegral von f über γ ist die komplexe Zahl

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

(· : Mult. in $\mathbb{C}$!)

$$\int_a^b \text{Re}\left(f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right)dt + i\int_a^b \text{Im}\left(f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right)dt .$$

Bem : ① Analogie zum Kurvenintegral von Vektorfeldern : dort bildet man das Skalarprodukt $\langle f[\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \in \mathbb{R}$! (nicht verwechseln!)

② der Integrand ist Regelfunktion auf $[a,b]$, also existiert das Integral.

Bsple : i) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$f(z) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$

$$\int_\gamma z^m\,dz = \int_0^{2\pi} i\,e^{it}\,e^{imt}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{i(m+1)}\,e^{i(m+1)t}\right\}dt = \frac{1}{m+1}\,e^{i(m+1)t}\Big|_0^{2\pi}$$

$m \neq -1$ $\qquad = 0$

für $m = -1$: $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,e^{it}\,e^{-it}\,dt = 2\pi i$.

ii) Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t\cdot z_2 + (1-t)\,z_1$, $0 \le t \le 1$

und $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_0^1 (z_2 - z_1)\left(t z_2 + (1-t)\,z_1\right)^n dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{n+1}\,\frac{d}{dt}\left\{t z_2 + (1-t)\,z_1\right\}^{n+1} dt =$$

$$\frac{1}{n+1}\left[z_2^{n+1} - z_1^{n+1}\right] .$$

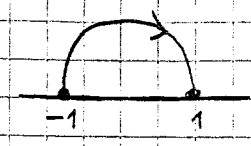
iii) <u>allgemeiner</u>: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Integrationsweg

$f(z) := z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, $0 \notin \operatorname{Spur}\gamma$

im Falle $n < 0$ $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma z^n\,dz = \frac{1}{n+1}\left(\gamma(b)^{n+1} - \gamma(a)^{n+1}\right).$$

iv) $\gamma(t) = e^{i(\pi - t)}$, $0 \le t \le \pi$



$f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^\pi -i\, e^{i(\pi-t)} \cdot \left| e^{i(\pi-t)} \right| dt =$$

$$-i\, e^{i\pi} \int_0^\pi e^{-it}\,dt = i \left(\frac{1}{-i} e^{it} \right) \Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$$

$\rightarrow$ v) $\gamma(t) = t$, $-1 \le t \le 1$ (Strecke von -1 nach 1)

$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_{-1}^1 |t|\,dt = 2 \int_0^1 t\,dt = 1 .$$

SATZ 2.1: Eigenschaften von $\int_\gamma f(z)\,dz$

i) (Invarianz unter Umparametrisierungen)

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg, $\tilde{\gamma} : [c,d] \to [a,b]$ stückweise C^1 mit $\tilde{\gamma}' > 0$, $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tilde{\gamma}$, $f : \text{Spur}\,\gamma = \text{Spur}\,\tilde{\gamma} \to \mathbb{C}$ stetig

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$$

M.a.W.: $\int_\gamma f(z)\,dz$ hängt nur von Spur γ und der gewählten Orientierung ab, aber nicht davon, wie schnell man Spur γ durchläuft.

ii) (Linearität) γ Integrationsweg, $f, g : \operatorname{Spur}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig, $a, b \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma (a \cdot f(z) + b\, g(z))\, dz = a \int_\gamma f(z)\, dz + b \int_\gamma g(z)\, dz .$$

iii) $$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$

iv) $$\int_{\gamma_1 \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \,, \text{ wenn } \gamma_1(b) = \gamma_2(a).$$

v) (Abschätzung) $$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \le L(\gamma) \cdot \max_{z \in \operatorname{Spur}\gamma} |f(z)| .$$

Beweis: i) z.z.: $$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t))\, \tilde{\gamma}'(t)\, dt$$

Gemäß $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\sigma(t))\, \sigma'(t)$ folgt dies direkt aus der Substitutionsregel. Hier haben γ als glatt angenommen, allgemeine γ werden zerlegt.

ii) - iv) ergeben sich aus den Regeln für $\int_a^b \ldots dt$

v) es gilt $$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \right| \le$$

(↑ Satz 12.4)

$$\int_a^b |f(\gamma(t))\, \gamma'(t)|\, dt \le \max_{z \in \operatorname{Spur}\gamma} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt .$$

□

DEF 2.2: Stammfunktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig (komplexe).

i) $F: \Omega \to \mathbb{C}$ heißt eine Stammfunktion zu f auf Ω, falls F holomorph ist mit $F' = f$ auf Ω.

ii) f besitzt lokal auf Ω Stammfunktionen $:\Longleftrightarrow$

jeder Punkt z_0 hat eine Umgebung $U \subset \Omega$, auf der es eine holomorphe Funktion $F: U \to \mathbb{C}$ gibt mit $F' = f$ auf U.

Bem. + Bsple:

① Ω Gebiet, $F, \tilde{F}: \Omega \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen zu f $\Longrightarrow$

$\exists\, c \in \mathbb{C}$: $F(z) = \tilde{F}(z) + c$ auf Ω

② $f(z) = e^z$ auf $\mathbb{C}$, Stammfunktion $e^z + c$, $c \in \mathbb{C}$

$f(z) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$, auf $\mathbb{C} - \{0\}$, Stammfunktion $\frac{1}{m+1} z^{m+1} + c$

③ $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergent auf $D_r(z_0)$, $r > 0$

$\Longrightarrow F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k (z - z_0)^{k+1} + c$ ist Stammfkt. auf $D_r(z_0)$.

④ Wir werden gleich sehen: $f(z) = 1/z$ besitzt keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} - \{0\}$, man kann nur lokale Stammfunktionen finden. Das folgt aus den Sätzen 2.2, 2.3.

SATZ 2.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $F: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f auf Ω. Dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma: [a,b] \to \Omega$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Das Wegintegral hängt nur von den Endpunkten ab.

Beweis: Man zerlege $[a,b]$ in der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, so daß $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ von der Klasse C^1 ist $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}_{= \frac{d}{dt} F(\gamma(t))}\,dt$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \sum_{k=1}^{n} F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1})) = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)). \quad \square$$

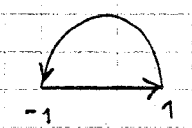
KOROLLAR: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Hat f auf Ω eine Stammfunktion, so gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege γ in Ω.

a) Sei $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ $\Longrightarrow$ γ geschlossene Kurve in $\mathbb{C}-\{0\}$, aber:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

$\Rightarrow$ es gibt keine holomorphe Funktion $F: \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = 1/z$.

Später: ist U z.B. eine offene Kreisscheibe mit $0 \notin U$, so hat dort $z \to 1/z$ eine Stammfunktion, d.h. es gibt lokal auf $\mathbb{C}-\{0\}$ Stammfunktionen

b) $f(z) = |z|$ ist stetig auf $\mathbb{C}$; betrachte $\gamma =$ 

$$\int_\gamma |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|\,dt + \int_0^{\pi} i e^{it}\,dt$$

(ie^{it} ← $\frac{d}{dt} e^{it}$)

$$= 1 + \text{[illegible]} \cdot (-2) \neq 0$$

$\Rightarrow$ es gibt keine Stammfunktion zu f

□

Wann gibt es Stammfunktionen zu $f: \Omega \to \mathbb{C}$ und wie konstruiert man sie?

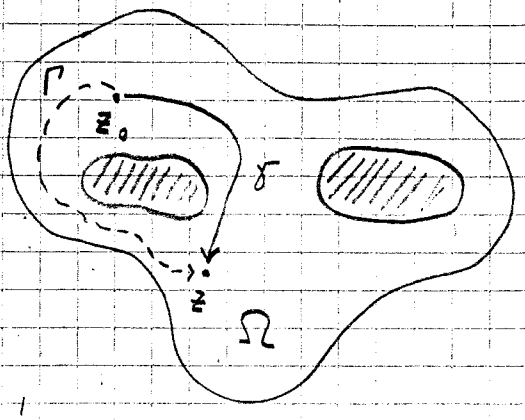
Unser Vorgehen orientiert sich völlig an den Ideen, die wir in §26 für Vektorfelder und 1-Formen entwickelt haben, d.h. wir beginnen mit einer Umkehrung des Korollars.

SATZ 2.3: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall\ \gamma \text{ geschlossener Weg in } \Omega \implies$$

f hat auf Ω eine Stammfunktion.

Beweis:



Man fixiere einen Punkt $z_0 \in \Omega$.

Für $z \in \Omega$ bezeichne $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$

einen glatten Weg von z_0 nach z in Ω,

denn es nach Voraussetzung an Ω ja gibt. Es sei

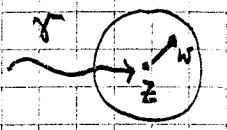
$$F(z) = \int_\gamma f$$

Für einen anderen Weg Γ von z_0 nach z ist $\gamma^- \Gamma$ geschlossen,

also $$0 = \int_{\gamma^- \Gamma} f = -\int_\gamma f + \int_\Gamma f,$$

so daß $F(z)$ wohldefiniert ist. Wir zeigen jetzt: $f(z) = F'(z)$.

Dazu sei $w \in D_\delta(z)$,



$D_\delta(z) \subset \Omega$.

Dann gilt $$F(w) - F(z) = \int_{\overrightarrow{zw}} f = \int_0^1 f(z + t(w-z))\,(w-z)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \int_0^1 f(z+t(w-z))\,dt \xrightarrow[w\to z]{} f(z),$$

denn f ist ja stetig. $\square$

Natürlich ist dies kein praktisches Kriterium, etwas einfacher zu handhaben ist

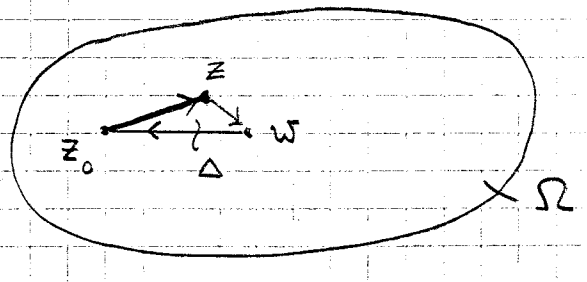
<u>SATZ 2.4:</u> Sei Ω offen und <u>konvex</u>. $f:\Omega\to\mathbb{C}$ sei stetig.

Gilt dann $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes Dreieck

$\Delta \subset \Omega$, so hat f eine Stammfunktion.

Beweis:

Sei $F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f$, $z_0 \in \Omega$ fest.



Für w nahe z folgt

$$F(w) - F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 w}} f - \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f = \quad \leftarrow \partial\Delta \text{ wie angegeben orientiert}$$

$$\underbrace{-\int_{\partial\Delta} f}_{=0} + \int_{\overrightarrow{zw}} f = \int_{\overrightarrow{zw}} f$$

und wie vorhin zeigt man: $\frac{1}{w-z}\int_{\overrightarrow{zw}} f \to f(z)$ bei $w\to z$.

$\square$

Ersetzt man „f stetig" durch „holomorph", so gilt viel mehr:

SATZ 2.5: Integralsatz v. Cauchy (unter zu starken Voraussetzungen ?)

Sei Ω offen und sternförmig, d.h. es gibt einen Punkt $z_0 \in \Omega$ mit $\overrightarrow{z_0 z} \subset \Omega$ für alle $z \in \Omega$. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit stetiger Ableitung*. Dann besitzt f eine Stammfunktion $F: \Omega \to \mathbb{C}$.

Insbesondere verschwinden alle Integrale über geschlossene Wege in Ω.

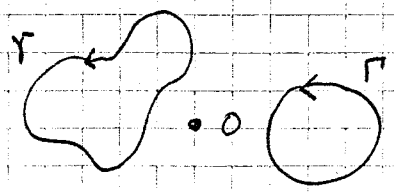
KOROLLAR: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Ableitung*. Dann gibt es lokale Stammfunktionen zu f und $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \subset U$, die in einem sternförmigen Teilgebiet von U verlaufen.

Bem: 1) ad *: Stetigkeit von f' ist immer gegeben, holomorphe Funktionen sind sogar komplex analytisch. Da wir dies jetzt noch nicht wissen, benötigen wir obige Bedingung.

2) $z \mapsto 1/z$ ist holomorph auf $\mathbb{C} - \{0\} \Longrightarrow$

$1/z$ hat auf z.B. $D_r(z_0)$ eine Stammfunktion, falls $0 \notin D_r(z_0)$

außerdem:



$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$$

für alle geschlossenen γ, die 0 nicht einschließen

3) Sternförmigkeit ist eine starke Voraussetzung. Satz 2.5 gilt für <u>einfach zusammenhängende Gebiete</u>, d.h. jede geschlossene Kurve in Ω muß sich stetig in einen Punkt deformieren lassen, ohne daß man dabei Ω verläßt. $\mathbb{C} - \{0\}$ hat diese Eigenschaft nicht!

Beweis: Wir reduzieren die Behauptung auf eine bekannte reelle Situation, im nächsten Abschnitt geben wir den klassischen Beweis nach Goursat (1858-1936), der auch ohne Stetigkeit auskommt.

Sei $f = u + iv$. Wir bilden die Vektorfelder

$$R := (u, -v), \quad S := (v, u) : \Omega \to \mathbb{R}^2.$$

Mit $z = (x, y)$ folgt:

$$\partial_y R_1 = \partial_y u \overset{\text{Cauchy R. Dgln}}{=} -\partial_x v = \partial_x R_2,$$

$$\partial_y S_1 = \partial_y v = \partial_x u = \partial_x S_2,$$

so daß R, S die Integrabilitätsbedingung aus Satz 26.3 erfüllen $\Rightarrow \exists\, \varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$R = \nabla \varphi, \quad S = \nabla \psi,$$

d.h. $R_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $R_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $S_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $S_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$.

Setze $F(z) = \varphi(z) + i\,\psi(z)$. Da φ, ψ von der Klasse C^1 sind, ist F stetig reell differenzierbar mit

$$\partial_x \operatorname{Re} F = \partial_x \varphi = R_1 = u,$$
$$\partial_y \operatorname{Im} F = \partial_y \psi = S_2 = u,$$
$$\partial_y \operatorname{Re} F = \partial_y \varphi = R_2 = -v,$$
$$\partial_x \operatorname{Im} F = \partial_x \psi = S_1 = v$$

$\Rightarrow$ die Cauchy-R. Dglen gelten für F, F ist holomorph.

Es gilt $F'(z) = \partial_x \operatorname{Re} F(z) - i\,\partial_y \operatorname{Re} F(z)$

$$= \partial_x \varphi(z) - i\,\partial_y \varphi(z)$$
$$= R_1(z) - i\,R_2(z) = u(z) + i\,v(z) = f(z),$$

also ist F eine Stammfunktion zu f.

□

Bem: Die Stetigkeit der Ableitung wird benötigt, um Satz 26.3 zu benutzen. Dort sind die Vektorfelder von der Klasse C^1.

§ 3 Cauchy'scher Integralsatz, Integralformel von Cauchy und Folgerungen

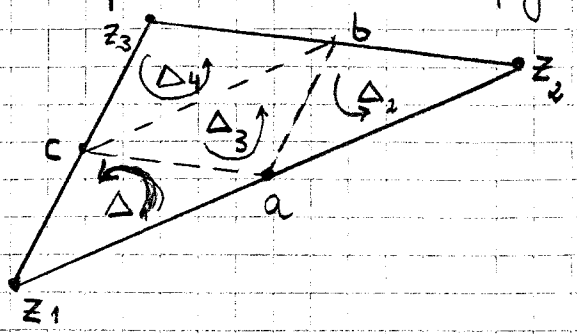
Wir geben hier zunächst den funktionentheoretischen Beweis des Integralsatzes von Cauchy, der ohne Stetigkeit von $f'(z)$ auskommt. Zur Vorbereitung dient

SATZ 3.1 (Goursat)

> Das abgeschlossene Dreieck Δ sei enthalten in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:
>
> $$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0,$$
>
> wobei der Durchlaufsinn der Berandung keine Rolle spielt.

Bem: Im allgemeinen ist natürlich $\partial\Delta$ mit einem Durchlaufsinn zu versehen, da dieser das Vorzeichen entscheidet.

Beweis des Satzes: Seien z_1, z_2, z_3 die Ecken von Δ, wir schreiben $\partial\Delta = [z_1, z_2, z_3]$, wobei die Eckpunkte in dieser Reihenfolge durchlaufen werden sollen.



Jede Seite wird halbiert, die Teilpunkte a, b, c werden verbunden, so daß

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{4} \Delta_i' \quad \text{und}$$

$$\int f(z)\,dz = \int f(z)\,dz + \int f(z)\,dz + \int f(z)\,dz + \int f(z)\,dz,$$

$$[z_1 z_2 z_3] \qquad \underbrace{[z_1\, a\, c]}_{=\partial\Delta_1} \qquad \underbrace{[c,a,b]}_{=\partial\Delta_3} \qquad \underbrace{[a,z_2,b]}_{=\partial\Delta_2} \qquad \underbrace{[c,b,z_3]}_{=\partial\Delta_4}$$

denn rechts heben sich die Kanten, die 2^{mal} durchlaufen werden, gerade heraus.

Es gilt: $$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)\,dz\right| \le 4 \cdot \max_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)\,dz\right|$$

Es bezeichne Δ^1 eines der Dreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ mit

$$\left|\int_{\partial\Delta^1} f(z)\,dz\right| = \max_{k=1,\dots,4} \left|\int_{\partial\Delta_k} f(z)\,dz\right|$$

Wir erhalten also

$$(1) \qquad \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4 \left|\int_{\partial\Delta^1} f(z)\,dz\right|,$$

$$(2) \qquad L(\partial\Delta^1) = \tfrac{1}{2} L(\partial\Delta).$$

Nun zerlegt man Δ^1 wie oben in 4 Teildreiecke $\sim \Delta_k^1$, orientiert die Seiten richtig und bezeichnet mit Δ^2 das Teildreieck mit $\left|\int_{\partial\Delta^2} f(z)\,dz\right| = \max_{k=1,2,3,4} \left|\int_{\partial\Delta_k^1} f(z)\,dz\right|$. Aus (1), (2) wird

$$(1)' \qquad \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^2 \left|\int_{\partial\Delta^2} f(z)\,dz\right|, \qquad L(\partial\Delta^2) = \tfrac{1}{4} L(\partial\Delta). \quad (2)'$$

Man bekommt eine absteigende Folge $\{\Delta^n\}$ von Dreiecken $\subset \Delta$ mit (Induktion!)

$$(1)_n \qquad \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz \right|$$

$$(2)_n \qquad L(\partial\Delta^n) = L(\partial\Delta)\cdot 2^{-n}.$$

Offenbar gilt $\operatorname{diam} \Delta^n$ (= Durchmesser von Δ^n) $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

nach dem Cantor'schen Durchschnittssatz 16.6 gibt es genau ein $z_0 \in \Delta$

mit $$\{z_0\} = \bigcap_{h=1} \Delta^n .$$

f ist in z_0 diff'bar $\Longrightarrow$ es gibt eine stetige Funktion

$R: U \to \mathbb{C}$ mit

$$\begin{cases} R(z_0) = 0 \\ f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\left(f'(z_0) + R(z)\right), \quad z \in U. \end{cases}$$

$F(z) := f(z_0)\,z + \frac{1}{2} f'(z_0)\,(z-z_0)^2$ ist Stammfunktion zu

$\varphi: z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$, d.h.

$$\int_\gamma \varphi(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ (Satz 2.2), also

$$\left| \int_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta^n} (z-z_0)\,R(z)\,dz \right| \leq$$

$$L(\partial\Delta^n) \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n} |z-z_0| \cdot |R(z)|$$

Nun gilt $|z - z_0| \leq L(\partial\Delta^n)$ für $z \in \partial\Delta^n \Longrightarrow_{(1)_n}$

$$\left| \int_\Delta f(z)\,dz \right| \leq 4^n \, L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z \in \Delta^n} |R(z)| \leq_{(2)_n}$$

$$L(\partial\Delta)^2 \max_{z \in \Delta^n} |R(z)| \longrightarrow_{n \to \infty} 0,$$

so daß $\int_\Delta f(z)\,dz = 0$ wie behauptet. □

KOROLLAR: (Verschärfung)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, Δ ein abgeschlossenes Dreieck $\subset U$, $\zeta \in \Delta$, f sei stetig auf U und holomorph auf $U - \{\zeta\}$. Dann gilt wie zuvor

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

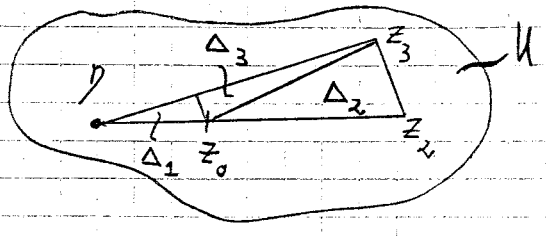
Bem: Holomorphie ist also zunächst im Punkt ζ (möglicherweise) verletzt, trotzdem verschwindet $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$. Wir werden später bei der Diskussion isolierter Singularitäten sehen

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ holomorph auf } U - \{\eta\} \\ f \text{ stetig } \quad " \quad U \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ holomorph auf } U,$$

d.h. die "Verschärfung" ist keine, nur zum jetzigen Zeitpunkt wissen wir das nicht.

Beweis des Korollars: Je nach Lage von η unterscheiden wir drei Fälle

① η Eckpunkt: $\eta = z_1$



Sei $z_0 \in [\eta z_2]$ nahe η. Zeichne durch z_0 eine Parallele zu $[z_2 z_3]$ und verbinde z_0 mit z_3 $\Longrightarrow$ $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ und

$$\int_{[\eta z_2 z_3]} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz$$

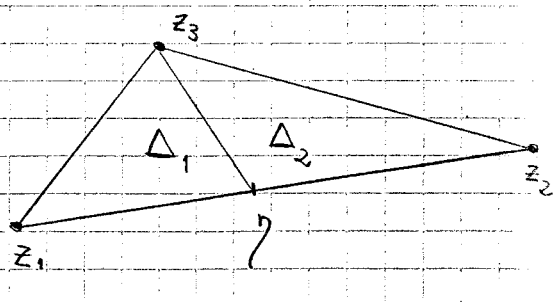
bei passender Orientierung von $\partial\Delta_k$. Nach Satz 3.1 gilt

$$\int_{\partial\Delta_2} \ldots = \int_{\partial\Delta_3} \ldots = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right| \le L(\partial\Delta_1) \cdot \max_{z \in \Delta_1} |f(z)|$$

$\longrightarrow 0$ bei $z_0 \longrightarrow \eta$.

② $\eta \in$ Kante von Δ:



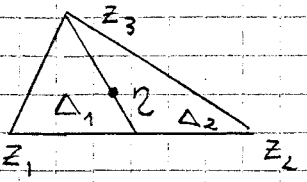
verbinde η hier mit z_3 $\Longrightarrow$ $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$

und bei passender Orientierung

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz}_{=0}$$

nach ① (η Ecke von Δ_1, Δ_2)

③ $\eta \in \overset{\circ}{\Delta}$:



Durch Einführen der neuen "Kante" durch z_3 und η gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz}_{=0}$$

nach ②, da $\eta \in$ Kante von Δ_1 u. Δ_2.

□

Kombination von Satz 2.4 mit dem Korollar ergibt

SATZ 3.2 : Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Konvexes Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei stetig auf Ω und holomorph bis eine mögliche Ausnahmestelle. Dann hat f eine Stammfunktion.

KOROLLAR: Ist Ω nicht konvex, so hat f (i.a. nur) lokal auf Ω Stammfunktionen. D.h.: Auf jeder Kreisscheibe $D \subset \Omega$ existiert F_D mit $F_D' = f$ auf D.

(Für das Korollar wende man Satz 3.2 auf Kreisscheiben in Ω an.)

Aus Satz 2.2 und Satz 3.2 bekommt man

SATZ 3.3 : Cauchy Integralsatz für konvexe Gebiete !

Sei Ω Konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig auf Ω

und holomorph bis auf eine mögliche Ausnahmestelle. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma \subset \Omega$.

Bem.: Der Cauchy-Integralsatz für konvexe Gebiete (später: allgemeinere Gebiete) ist der Schlüssel zur Funktionentheorie, alle anderen Sätze der Funktionentheorie benutzen direkt diesen Satz oder Folgerungen daraus. Deshalb sollte man sich den Wortlaut dieses Satzes genau einprägen und nicht die falsche Aussage

$$G \subset \mathbb{C} \text{ Gebiet}, \ f: G \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall\, \gamma \subset G \text{ geschlossen}$$

zitieren: $\int_{\partial D_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ für die positiv orientierte Kreislinie!

Das Gebiet $\mathbb{C} - \{0\}$ ist eben nicht konvex!

Die wohl wichtigste Anwendung des Integralsatzes ist eine Darstellungsformel für holomorphe Funktionen.

SATZ 3.3: Cauchy Integralformel für Kreise

Sei Ω offen in $\mathbb{C}$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Bezeichnet $\partial^+ D_r(z_0)$ den positiv orientierten Rand von $D_r(z_0)$

So gilt:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz \quad \text{für alle } \zeta \in D_r(z_0),$$

speziell:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, dt = f(z_0)$$

Beweis: Sei $G := D_{r+\varepsilon}(z_0)$; für $\varepsilon > 0$ klein genug ist $G \subset \Omega$, außerdem ist G konvex und $\partial^+ D_r(z_0)$ geschlossener Integrationsweg in G.

Sei

$$g(z) := \left\{ \begin{array}{ll} f'(\zeta) & , z = \zeta \\ \dfrac{f(z) - f(\eta)}{z - \zeta} & , z \neq \zeta \end{array} \right\} \quad , z \in G \quad (\zeta \in D_r(z_0) \text{ fix.})$$

g ist stetig auf G und holomorph auf $G - \{\zeta\}$, der Integralsatz ergibt

$$0 = \int_{\partial^+ D_r(z_0)} g(z)\, dz.$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz - f(\zeta) \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-\zeta}.$$

Mit $\displaystyle\int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-\zeta} = \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

folgt die Beh. aus dem Lemma nach Satz 3.4. □

Bem: Der Beweis zeigt, daß es vorteilhaft ist, den Cauchy Integralsatz auch für Funktionen zu formulieren, die möglicherweise an einer Stelle

nicht komplex differenzierbar sind. Bei g weiß man dann nur die Stetigkeit in η.

Scharfes Hinsehen liefert uns nun die folgenden Aussagen über holomorphe Funktionen

wegen der Nummerierung ←

SATZ 3.4*: (Folgerungen aus der Integralformel)

i) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existieren auf Ω komplexe Ableitungen jeder Ordnung, d.h. f' ist holomorph, f'' auch, usw.

ii) Sei D eine Kreisscheibe um $z_0 \in \Omega$ mit $\overline{D} \subset \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f^{(n)}(\eta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{(z-\eta)^{n+1}}\, dz$$

für alle $\eta \in D$.

Beweisskizze: Wir wissen

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z-\eta}\, dz, \quad \eta \in D.$$

Nun parametrisiere man $\partial^+ D$ in der Form $t \mapsto z_0 + r e^{it}$ und schreibe $\eta = u + iv$ für die Variable. Es folgt die Darstellung

$$f(\eta) = \int_0^{2\pi} \phi(u,v,t)\, dt$$

mit einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion $\phi = \phi_1 + i\phi_2$.

Sodann zeigt man: für $k=1,2$ stellt das Integral

$$\int_0^{2\pi} \phi_k(u,v,t)\,dt$$

die Sätze über die Differentation von Integralen nach Parametern (etwa Satz 14.2), d.h.

$$\partial_u \int_0^{2\pi} \phi_k(u,v,t)\,dt = \int_0^{2\pi} \partial_u \phi_k(u,v,t)\,dt \text{ , etc.}$$

Benutzt man z.B. $f'(\zeta) = \partial_u f(\zeta)$, so folgt die Beh. ii) für $n=1$.

Übung: Einzelheiten!

Auf $\Psi: \zeta \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{(z-\eta)^2}\,dz$ kann man dieselben Überlegungen anwenden, d.h. Ψ ist auf D komplex diff'bar mit $\Psi'(\eta) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{(z-\eta)^3}\,dz$. Gemäß $\Psi = f'$ sieht man: f'' existiert auf D mit $f'' = \Psi'$, d.h. ii) gilt für $n=3$. Da D eine beliebige Kreisscheibe war, folgt: f' ist holomorph, usw.

□

Zu zeigen bleibt

Lemma: a) Für $\zeta \in D_r(z_0)$ ist $\int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-\zeta} = 2\pi i$.

b) Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und

und $\eta \notin \operatorname{Spur} \gamma$. Dann ist

$$w(\gamma, \eta) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\eta} \in \mathbb{Z} .$$

Bem: $w(\gamma, \eta)$ heißt die Windungszahl von γ bzgl. η. Den Grund für diese Bezeichnungsweise werden wir später erfahren.

Beweis des Lemmas: b) O.E. sei γ C^1, sonst zerlege man $[a,b]$ in Teilintervalle. Mit

$$\phi(\rho) := \int_a^\rho \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\eta} \, dt \quad , \quad a \le \rho \le b$$

ist nach dem Hauptsatz ($\eta \notin \operatorname{Spur}\gamma$ heißt Stetigkeit des Integranden)

$$\phi'(\rho) = \frac{\gamma'(\rho)}{\gamma(\rho)-\eta} \implies$$

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ e^{-\phi(\rho)} (\gamma(\rho)-\eta) \right\} = \gamma'(\rho) e^{-\phi(\rho)} - (\gamma(\rho)-\eta) \phi'(\rho) e^{-\phi(\rho)}$$

$$= 0 \implies \rho \mapsto e^{-\phi(\rho)} (\gamma(\rho)-\eta) \text{ ist Konstant:}$$

$$e^{-\phi(\rho)} (\gamma(\rho)-\eta) \equiv c$$

Mit $\rho = a$ folgt $\gamma(a)-\eta = c \implies$

$$\frac{\gamma(\rho)-\eta}{\gamma(a)-\eta} = e^{\phi(\rho)} \qquad \forall \rho \in [a,b]$$

Nun wähle $a = b$ und beachte $\gamma(a) = \gamma(b) \Longrightarrow$

$$e^{\phi(b)} = 1$$

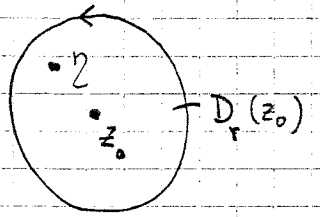
Schreibt man $\phi(b) = u + iv$, so ist

$$e^{u} e^{iv} = 1 \quad \Longrightarrow \quad u = 0 \,, \; v \in 2\pi\mathbb{Z} \,,$$

d.h. $$\phi(b) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\zeta} \in 2\pi i \cdot \mathbb{Z}$$

Das zeigt b).

a)



Nach b) ist $\int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-\eta} = k \, 2\pi i$

mit $k \in \mathbb{Z}$, wobei k apriori von η abhängt.

Sei $\eta(t) := z_0 + t(\eta - z_0)$, $0 \le t \le 1$. Offenbar ist

$$t \mapsto \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-\eta_t} \quad \left(=: k_t \cdot 2\pi i \right)$$

stetig, denn $\eta(t)$ verläuft ganz im Innern von $D_r(z_0)$. Also ist

$t \mapsto k_t$ stetig auf $[0,1]$ und somit konstant, denn $k_t \in \mathbb{Z}$.

Also $$k_1 = k_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = 1 \,,$$

wie man durch Einsetzen der Parametrisierung von $\partial^+ D_r(z_0)$ erkennt.

□

Es gilt die folgende Umkehrung des Satzes von Goursat

25.5

SATZ 3.5: (Morera)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Dann ist f holomorph auf G.

Beweis: Sei D eine Kreisscheibe $\subset G$. Nach Satz 2.4 hat f eine Stammfunktion F auf D (Dist ja konvex), diese ist beliebig oft $\mathbb{C}$-diff'bar (nach Satz 3.4*), speziell ist f holomorph auf D, anders gesagt f ist lokal holomorph und somit holomorph. □

Holomorphie kann also äquivalent beschrieben werden durch

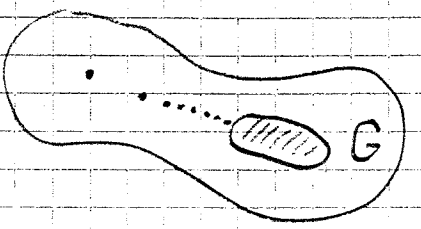
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \qquad \forall \Delta \subset G$$

Wir geben folgende Verschärfung von Satz 3.2, die ohne Konvexität des Definitionsgebietes auskommt und gleichzeitig die Zahl der potentiellen Ausnahmestellen vergrößert.

SATZ 3.6: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (oder offene Menge), $f: G \to \mathbb{C}$ stetig und $M \subset G$ eine Menge ohne Häufungspunkt in G.

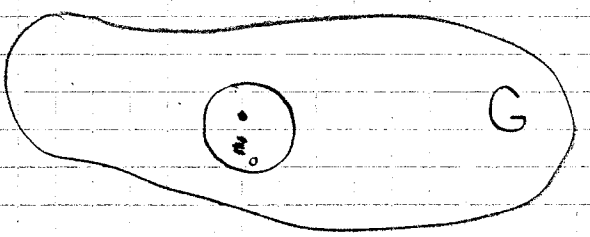
f sei holomorph auf $G - M$. Dann ist f auch in den Punkten von M komplex differenzierbar, also insgesamt holomorph auf G.

Bem: Die "Ausnahmemenge" M besteht entweder aus nur endlich vielen Punkten oder aber aus abzählbar vielen Punkten, die sich höchstens zum Rand ∂G hin häufen dürfen.



Kurvenstücke $M \subset G$ sind nicht zulässig.

Beweis:



Sei $z_0 \in M$. Nach Vor. an M gibt es ein $r > 0$ mit

$$D_r(z_0) \cap M = \{z_0\}, \qquad \overline{D_r}(z_0) \subset G,$$

d.h. für genügend kleine Wahl von r ist z_0 die einzige Ausnahmestelle in $D_r(z_0)$. Nun benutze man Satz 3.2 + Korollar mit $\Omega = D_r(z_0)$, es folgt die Holomorphie von f auf $D_r(z_0)$, denn f hat dort eine Stammfunktion F, diese ist nach 3.4* beliebig oft diff'bar. □

In den Sätzen 3.2, 3.6 ist die betrachtete Funktion immerhin noch stetig im Ausnahmepunkt $z_0 \in G$. Dies kann wie folgt abgeschwächt werden

SATZ 3.7: Hebbarkeitssatz von Riemann

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f: G - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $r > 0$ sei f beschränkt auf $\overline{D_r}(z_0) - \{z_0\}$, d.h.

$$\sup_{0 < |z - z_0| \leq r} |f(z)| < \infty.$$

Dann gibt es eine eindutig bestimmte holomorphe Funktion $\tilde{f}: G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \neq z_0$.

Bem: Im Unterschied zur bisherigen Situation ist f in z_0 gar nicht definiert, der Satz besagt, daß $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert und eine holomorphe Fortsetzung auf G liefert.

Beweis: Sei $\varphi: G \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) := \begin{cases} (z - z_0) f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi$ holomorph auf $G - \{z_0\}$ und stetig auf G, denn

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Aus z.B. Satz 3.6 folgt Holomorphie von φ auf G.

Setze $\tilde{f}(z) := \begin{cases} \varphi'(z_0), & z = z_0 \\ \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \end{cases}$

Dann ist $\tilde{f}$ auch holomorph auf $G - \{z_0\}$ und stetig in z_0.

(wegen der komplexen Differenzierbarkeit von f in z_0), also nach 3.6 holomorph auf G.

Offenbar gilt für $z \neq z_0$ $\tilde{f}(z) = f(z)$. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist klar. □

Nun benutzen wir die Cauchy Integralformel für die Ableitung zum Beweis des klassischen Satzes von Liouville, der kein Analogon für reelle Funktionen besitzt.

SATZ 3.8 : (Liouville)

> Es sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Beispielsweise gilt nicht $|\sin z| \leq 1$ auf $\mathbb{C}$, was man natürlich auch ohne Liouville verifiziert.

Beweis: Sei $D_r(\eta)$ beliebig $\Longrightarrow$ *

$$f'(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(\eta)} \frac{f(z)}{(z-\eta)^2}\, dz \Longrightarrow$$

$$|f'(\eta)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\mathbb{C}} |f(z)| \cdot \frac{1}{r^2} \cdot L(\partial D_r(\eta))$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \sup_{\mathbb{C}} |f| \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \to \infty$$

Also ist $f' \equiv 0 \underset{\text{Satz 1.2}}{\Longrightarrow} f \equiv \text{const.}$ □

Mit Liouville läßt sich der Fundamentalsatz der Algebra trivial beweisen.

SATZ 3.9: (Fundamentalsatz)

Sei P ein Polynom in $z \in \mathbb{C}$ vom Grad > 0. Dann hat P eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$

Beweis: Falls nicht $\Longrightarrow$ $f(z) := 1/P(z)$ ist holomorph mit $*$ $|f(z)| \leq K$ für ein $K > 0$. Denn:

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \geq$$

$n = \text{grad } P$, $|z| \geq 1$

$$|a_n| \cdot |z|^n - \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1} =$$

$$|z|^{n-1} \left\{ |a_n| \cdot |z| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right\} \longrightarrow \infty \quad \text{für } |z| \to \infty,$$

so daß $\lim_{|z| \to \infty} 1/|P(z)| = 0$. Es gibt also ein $R > 0$ mit $|f(z)| \leq 1 \quad \forall\, |z| \geq R$. Da f auf $\overline{D}_R(0)$ beschränkt ist, folgt $*$. Nach Liouville ist $f \equiv c \neq 0$, also $P \equiv 1/c$, Widerspruch zu $n = \text{grad } P > 0$. □

Zum Abschluß zeigen wir mit Hilfe der Cauchy-Integralformel für Kreise, daß holomorphe Funktionen komplex analytisch sind. Die Umkehrung wurde schon in Satz 1.6 bewiesen.

SATZ 3.10: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f komplex analytisch, genauer gilt: Ist $z_0 \in \Omega$, so hat man die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0),$$

und die Konvergenz ist lokal gleichmäßig auf der größten Kreisscheibe $D_R(z_0)$, die noch in Ω liegt. Für beliebige Radien $r < R$ hat man die Formel

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz.$$

Beweis: Wähle $z_0 \in \Omega$ und setze

$$R := \sup \{ \rho > 0 : D_\rho(z_0) \subset \Omega \} \in (0, \infty]$$

Für $0 < r < R$ und $z \in D_r(z_0)$ ist nach Satz 3.3

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

Die Beweisidee besteht nun einzig darin, den Integranden in eine geometrische Reihe zu entwickeln:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right] = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$

nach der Formel für die geometrische Reihe unter Beachtung von

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{1}{r}|z - z_0| < 1 .$$

Also: $$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta - z_0}\right)^{k+1}(z - z_0)^k .$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial^+ D_r(z_0)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta - z_0}\right)^{k+1}(z - z_0)^k\right) f(\zeta)\, d\zeta$$

Sei z fixiert, $\varphi_k(\zeta) := \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}(z - z_0)^k$.

Dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k$ konvergiert glm. auf $\partial D_r(z_0)$

Schreibt man $\int_{\partial^+ D_r(z_0)} \ldots$ noch als Integral $\int_0^{2\pi} \ldots$, so kann man die üblichen Vertauschungssätze benutzen (z.B. Analysis II, Satz 13.2) mit dem Ergebnis

$$\int_{\partial^+ D_r(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\eta)\, d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \gamma_k(\eta)\, d\eta,$$

also

$$* \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{k+1}}\, d\eta \right\} (z - z_0)^k .$$

$*$ ist richtig für jede Wahl von $r < R$ und alle $z \in D_r(z_0)$.

Nach der Cauchy-Integralformel für die Ableitung gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{k+1}}\, d\eta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0),$$

so daß $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{für } z \in D_R(z_0).$$

□

Bem: 1) Ist $z_0 \in \Omega$, so konvergiert die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)\, (z - z_0)^k$$

der holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$

lokal gleichmäßig auf dem größten Kreis um z_0 in Ω gegen f.

2) Die Taylorreihe kann auch noch auf einem größeren Kreis um z_0 konvergieren, muß aber dann nicht unbedingt die Funktion darstellen!



(Übung: Beispiel dazu)

3) Man beachte die in Satz 3.10 gemachte Feststellung über die Größe des Konvergenzkreises: im Fall $\Omega = \mathbb{C}$ konvergiert die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k$ bei beliebiger Entwicklungsmitte z_0 auf ganz $\mathbb{C}$. Das steht im Gegensatz zum reellen Fall:

$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ ist reell-analytisch auf $\mathbb{R}$, d.h. um jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ als reelle Taylor-Reihe entwickelbar. Die Taylor-Reihe in 0 lautet (geom. Reihenformel!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

die Reihe rechts konvergiert aber nicht auf $\mathbb{R}$ sondern nur auf $(-1,1)$. Dies wird verständlich, wenn man komplexe Argumente betrachtet:

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist nur holomorph auf $\mathbb{C} - \{\pm i\}$, und dieses Gebiet enthält nur den Kreis $D_1(0)$.

Insgesamt haben wir jetzt die folgenden Beschreibungen:

SATZ 3.11 : Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ Dann sind äquivalent:

1) f ist holomorph auf Ω.
2) f besitzt lokal Stammfunktionen
3) f ist reell differenzierbar, und es gelten die Cauchy-Riemann Gleichungen
4) f ist komplex analytisch.

DEF 3.1 : Nullstellenordnung

Seien $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und f sei holomorph auf einer Umgebung von z_0. z_0 heißt n-fache Nullstelle oder Nullstelle der Ordnung n von f, falls

$$\begin{cases} 0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) & \text{und} \\ f^{(n)}(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

Bem : i) Schreibt man lokal bei z_0 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$, so folgt

① f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n $\Longleftrightarrow$

② $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0, \quad a_n \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$

③ $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, g holomorph

auf Umgebung von z_0, $g(z_0) \neq 0$.

ii) Sei $w \in \mathbb{C}$. f hat in z_0 eine w-Stelle der Ordnung n $\Longleftrightarrow$

$f - w$ hat in z_0 eine 0 Stelle der Ordnung n

iii) z^n hat in 0 eine 0 Stelle der Ordnung n.

Der Identitätssatz 1.6 lässt sich jetzt

SATZ 3.12: Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

Dann sind äquivalent:

(i) $f \equiv 0$ auf G

(ii) es gibt mindestens eine Nullstelle von f der Ordnung ∞

(iii) es gibt eine Folge $\{z_k\}$ in G mit $\lim_{k\to\infty} z_k =: z_0 \in$ G und $f(z_k) = 0$ sowie $z_k \neq z_0$ für alle k.

26.5

Wir geben nochmals einen

Beweis: (Conway, p. 78) (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial

(i) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $z_0 \in G$ Grenzwert einer Folge $\{z_k\}$ mit

$$f(z_k) = 0, \quad z_k \neq z_0 .$$

Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 ,$$

aber

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0 .$$

Dann schreibt man

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k , \quad a_n \neq 0 ,$$

auf einer Kreisscheibe $D_r(z_0)$. Sei

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} , \quad z \in D_r(z_0)$$

$\Rightarrow$ g holomorph auf $D_r(z_0)$ mit $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$,

$$g(z_0) = a_n \neq 0$$

Andrerseits : $0 = f(z_k) = (z_k - z_0)^n g(z_k) \overset{z_k \neq z_0}{\Longrightarrow} g(z_k) = 0$

Also auch $\lim_{k \to \infty} g(z_k) = g(z_0) = 0$, Widerspruch ! Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ wie oben, die Ordnung der Nullstelle z_0 ist ∞.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $N := \{ z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Die Voraussetzung in (ii) liefert $N \neq \emptyset$.

a) N ist abgeschlossen relativ G :

Sei $\{z_k\} \subset N$ mit $z_0 := \lim_{k\to\infty} z_k$, Zu zeigen: $z_0 \in N$

Es gilt $f^{(n)}(z_k) = 0 \implies f^{(n)}(z_0) = \lim_{k\to\infty} f^{(n)}(z_k) = 0$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, so daß $z_0 \in N$.

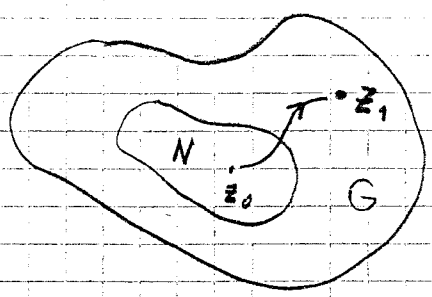
b) N ist offen : Sei $z_0 \in N$, $D_R(z_0) \subset G \implies$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{f^{(k)}(z_0)}_{=0} (z-z_0)^k = 0 \text{ auf } D_R(z_0) \implies$$

$$D_R(z_0) \subset N$$

Dann ist $N = G$; falls nicht, so existiert $z_1 \in G - N$ Sei $z_0 \in N$

und $\gamma : [0,1] \to G$ Weg von z_0 nach z_1.



Sei

$$\bar{t} := \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in N\}$$

Es gilt $\bar{t} > 0$ (da $D_r(z_0) \subset N$ für r klein) , $\bar{t} < 1$

und $\gamma(\bar{t}) \in N$ (da N abgeschlossen) $\implies$

$\exists\, \varepsilon > 0$: $D_\varepsilon(\gamma(\bar{t})) \subset N$ (N offen) $\implies$

$\gamma(t) \in N$ auch für $t > \bar{t}$ nahe $\bar{t}$, Widerspruch zur Def. von $\bar{t}$.

□

§4 Bernoulli-Zahlen, Bernoulli-Polynome, einige spezielle Taylorreihen und die Zeta-Funktion

Wir beschäftigen uns hier mit den Bernoulli-Zahlen und -Polynomen sowie der Riemannschen Zeta-Funktion, die in der analytischen Zahlentheorie von Bedeutung sind, man vergleiche etwa W. Schwarz, Primzahltheorie B.I. Wir geben nur einige höchst einfache Anwendungen → Potenzsummen oder H. Weyl, Algebraische Zahlentheorie B.I. . Die Bernoulli-Zahlen hängen eng zusammen mit den Entwicklungskoeffizienten von

$$g(z) := \begin{cases} 1, & z = 0 \\ \dfrac{z}{e^z - 1}, & z \neq 0 \end{cases}, \quad z \in D_r(0), \quad r < 2\pi,$$

bei $z = 0$. Offenbar ist g holomorph auf $D_r(0) - \{0\}$ und stetig in 0, denn $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z}(e^z - 1) = (\exp)'(0) = 1$ und damit auch $\lim_{z \to 0} g(z) = 1 = g(0)$. Nach Satz 3.6 oder 3.7 ist g holomorph auf $D_r(0)$, Satz 3.10 (beachte die Aussage über die Größe des Konvergenz-Kreises) ergibt die auf $D_{2\pi}(0)$ gültige Entwicklung

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) z^k .$$

Bem: g hat "echte" Singularitäten bei $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

DEF 4.1: $B_k := g^{(k)}(0)$ heißt k^{te} Bernoulli-Zahl.

Es gilt (p.37) für $z \neq 0$ und $|z| < \pi$

$$\cot z = i \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i \frac{e^{2iz}-1+2}{e^{2iz}-1} =$$

$$i + \frac{1}{z} \frac{2iz}{e^{2iz}-1} = i + \frac{1}{z} g(2iz)$$

und damit

$$\boxed{g(z) + \frac{1}{2}z = \frac{z}{2i} \cot\left(\frac{z}{2i}\right)}$$

Offenbar ist $z \mapsto \frac{z}{2i} \cot\left(\frac{z}{2i}\right)$ eine gerade Funktion, d.h.

$$\phi(z) = \phi(-z) \quad , \quad \phi(z) := \frac{1}{2}z + g(z) .$$

Anders formuliert: $z \mapsto \phi(z) - \phi(-z)$ ist identisch 0, also verschwinden alle Koeffizienten der Taylorreihe dieser Funktion bzgl. 0 als Entwicklungsmitte. D.h.: Alle ungeraden Koeffizienten der Taylorreihe von ϕ in 0 sind 0 $\iff$

$$B_1 = -1/2 \quad , \quad B_{2k+1} = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Beachtet man $B_0 = 1$, so folgt

$$(1) \qquad \boxed{\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}}$$

Für die geraden Koeffizienten kann man mit dem Cauchy Produktsatz für die

Multiplikation unendlicher Reihen eine Rekursionsformel ableiten:

$$1 = \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{e^z - 1} = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} z^{\ell-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right)$$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell+1)!} z^{\ell} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} B_k \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k$$

Koeffizientenvergleich: $c_0 = 1 = B_0$

$$c_n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k , \quad n \geq 1$$

Also (2)

$$\boxed{B_0 = 1, \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k , \quad n \geq 1}$$

Da nach (1) die $B_{2k+1} = 0$ (für $k \geq 1$) sind, ist (2) eine Rekursionsformel für B_{2k}, z.B. $n = 1$: $0 = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1$

(klar gemäß $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, o.ä.)

$n = 2$: $0 = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 =$

$$1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 B_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{6}$$

$n = 4$:

$$0 = \binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{4} B_4$$

$$= 1 - \frac{5}{2} + \binom{5}{2} B_2 + 0 + \binom{5}{4} B_4 \qquad \left(B_3 = 0 \right)$$

$$= 1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6} + 5 \cdot B_4 \quad \Longrightarrow \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$

$n = 6$: $\quad B_6 = \frac{1}{42}$

$n = 8$: $\quad B_8 = -\frac{1}{30}$

$n = 10$: $\quad B_{10} = \frac{5}{66}$,

$B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$, ... , $B_{26} = \frac{1}{6} \cdot 8\,553\,103$, ...

Aus der Rekursionsformel erkennt man: $\boxed{B_{2k} \in \mathbb{Q} \quad \forall k}$

Außerdem gilt: $\boxed{\{B_{2k}\} \text{ ist unbeschränkt.}}$

Wäre nämlich diese Folge beschränkt, so hätte man Konvergenz von

$$\varphi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist φ stetig z.B. in $2\pi i$

und wegen $g = \varphi$ auf $D_{2\pi}(0)$ folgt

$$\lim_{\substack{z \to 2\pi i \\ |z| < 2\pi}} \frac{z}{e^z - 1} = \varphi(2\pi i) .$$

Es ist für $z = iy$, $y \uparrow 2\pi$,

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{\cos y - 1}{iy} + \frac{\sin y}{y} \to 0,$$

so daß $\frac{z}{e^z - 1}$ bei $y \uparrow 2\pi$ keinen endlichen Limes hat. □

Von Euler stammen die folgenden Entwicklungen

(3) $$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{4^{\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} z^{2\nu-1}$$

auf $D_{\pi}(0) - \{0\}$

(4) $$\tan z = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{4^{\nu}(4^{\nu}-1)}{(2\nu)!} B_{2\nu} z^{2\nu-1}$$

auf $D_{\pi/2}(0)$

Beweis: $g(z) + \frac{1}{z}\frac{1}{2} = \frac{z}{2i} \cot\left(\frac{z}{2i}\right)$, $0 < |z| < 2\pi$ $\Rightarrow$

$$\cot z = i + \frac{1}{z} g(2iz), \quad 0 < |z| < \pi$$

Also: $$\cot z = i + \frac{1}{z}\left\{1 - \frac{2iz}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2iz)^{2k}\right\}$$

nach (1), daraus folgt sofort (3) für $0 < |z| < \pi$.

Die Beziehung (4) folgt aus (3) mit $\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$

□

Bem: Verzicht der Bernoulli-Zahlen

Es gilt $(\tan)' z = 1 + \tan^2 z$, $(\tan)'' z = 2 \tan z \ (1 + \tan^2 z)$

$\Rightarrow$ (Induktion) $(\tan)^{(k)}(z) =$ Polynom in $\tan z$ mit Koeffizienten $\in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ $\tan^{(k)}(0) \in \mathbb{N}_0 \quad \forall k$

D.h.: Die auf $D_{\pi/2}(0)$ konvergente Taylorreihe von $\tan z$ hat nur Koeffizienten aus $\mathbb{N}_0$

Vergleich mit (4) (dort steht ja die Taylorreihe!) liefert

$$\boxed{(-1)^{\nu-1} B_{2\nu} > 0} \quad .$$

Beachtet man $\frac{1}{\sin z} = \cot z + \tan \frac{z}{2}$, so ergeben (3), (4) die Taylorreihe von $\frac{z}{\sin z}$:

(5) $$\boxed{\frac{z}{\sin z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k - 2}{(2k)!} B_{2k} z^{2k}, \quad |z| < \pi}$$

□

Potenzsummen und Bernoulli-Zahlen

Für $k, n \in \mathbb{N}$ nennt man $\sum_{\ell=1}^{n} \ell^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ eine Potenzsumme. Explizite Formeln sind bekannt für $k = 1, 2$

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell^k = \begin{cases} \frac{n}{2}(n+1), & k = 1 \\ \frac{n}{6}(n+1)(2n+1), & k = 2 \end{cases}$$

und man bekommt diese durch geschicktes Raten. Es stellt sich das Problem einer systematischen Berechnung dieser Zahlen. Da man die Bernoulli-Zahlen via Rekursion kennt, gibt der folgende Satz Antwort.

SATZ 4.1: Für $k, n \in \mathbb{N}$ ist

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{B_\ell}{\ell} \binom{k}{\ell-1} \cdot n^{k+1-\ell}$$

Beweis: Man setzt

$$S_{n,k} := \sum_{\ell=0}^{n} \ell^k, \qquad S_{n,0} := n+1$$

$$E_n(w) := \sum_{\ell=0}^{n} \exp(\ell \cdot w), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Es gilt $\exp(\ell w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \ell^\nu w^\nu \Rightarrow$

$$E_n(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Big\{ \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \ell^\nu}_{= n+1 \text{ für } \nu = 0} \Big\} w^\nu =$$

mit der Konvention $0^0 = 1$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} S_{n,\nu} w^{\nu} \qquad *$$

Nun bracht

$$\frac{e^{nw}-1}{e^{w}-1} = \frac{\exp(w)^{n}-1}{\exp(w)-1} \overset{\text{geom. Summenformel}}{=}$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \exp(w)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp(\ell w) = E_{n-1}(w) \implies$$

$$E_{n-1}(w) = \frac{w}{e^{w}-1} \cdot \frac{e^{nw}-1}{w} \overset{(1)}{=}$$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} w^{\nu} \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{n^{\mu+1}}{(\mu+1)!} w^{\mu} \right),$$

wenn man $\frac{1}{w}\left(e^{nw}-1\right) = \frac{1}{w} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k} w^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k} w^{k-1}$

ausnutzt und den Index verschiebt.

Nun benutzt man den Cauchy-Produktsatz und bekommt die Entwicklung von $E_{n-1}(w)$ nach Potenzen von w. Vergleich mit * (ersetze dort n durch $n-1$) ergibt

$$S_{n-1,k} = \frac{1}{k+1} n^{k+1} - \frac{1}{2} n^{k} + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{B_\ell}{\ell} \binom{k}{\ell-1} n^{k+1-\ell}.$$

Die Behauptung folgt dann gemäß $S_{n,k} = S_{n-1,k} + n^{k}$.

□

→ Übung: Einzelheiten!

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ $\quad := 0, k = 1$

$$\Phi_k(z) := \frac{1}{k+1}(z-1)^{k+1} + \frac{1}{2}(z-1)^k + \sum_{\ell=2}^{k} \frac{B_\ell}{\ell} \binom{k}{\ell-1} (z-1)^{k+1-\ell}$$

$\in \mathbb{Q}[z]$:= Menge aller Polynome $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ (rationale Polynome)

Also liest sich Satz 4.1:

(6) $\Phi_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k$, $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$,

und diese Relation war Bernoulli (1655 - 1705) bereits bekannt.

Setzen die Werte der Bernoulli-Zahlen ein, so folgt beispielsweise

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2}(z^2 - z),$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{6}(2z^3 - 3z^2 + z),$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{4}(z^4 - 2z^3 + z^2),$$

$$\Phi_4(z) = \frac{1}{10}(z-1)z(2z-1)\left(z^2 - z - \frac{1}{3}\right)$$

und aus (6) ergibt sich

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 = \frac{1}{10}(n-1)n(2n-1)\left(n^2 - n - \frac{1}{3}\right), \quad n \geq 2.$$

Bem: Durch (6) wird das Polynom Φ_k eindeutig festgelegt (k fixiert). Ist nämlich $\Phi \in \mathbb{Q}[z]$ mit (6), so folgt $\Phi - \Phi_k = 0$ auf $\mathbb{N}$, also $\Phi = \Phi_k$.

Die Polynome Φ_k sind nicht zu verwechseln mit den Bernoulli-Polynomen.

Diese definieren wir jetzt und untersuchen anschließend den Zusammenhang mit den Polynomen Φ_k.

Sei $F(w,z) := e^{wz} \frac{z}{e^z - 1}$, $z, w \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$

$F(w,\cdot) : \mathbb{C} - \{ 2\pi i k : k \in \mathbb{Z} - \{0\} \} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\Longrightarrow$

zu jedem $w \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $B_k(w)$, $k \in \mathbb{N}_0$, mit

$$\boxed{F(w,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k(w) z^k, \quad |z| < 2\pi}$$

Offenbar: $B_k(0) = B_k$ Bernoulli-Zahlen

SATZ 4.2: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$B_k(w) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} B_\nu w^{k-\nu} = w^k - \frac{1}{2} w^{k-1} + \ldots + B_k$$

also ein Polynom vom Grad k, genannt das k^{te} Bernoulli-Polynom. (Offenbar ist $B_0 \equiv 1$)

Beweis: Per Def ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k(w) z^k = e^{wz} \frac{z}{e^z - 1} =$

$$\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} w^\ell z^\ell\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{1}{\nu!} z^\nu\right)$$

Rechts benutzt man den Produktsatz und bekommt nach Koeffizientenvergleich

$$B_k(w) = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)!\,\ell!} B_\ell w^{k-\ell}$$

□

Die folgenden Eigenschaften der Bernoulli-Polynome ergeben sich direkt

(a) $B_k'(w) = k\, B_{k-1}(w)$, $k \geq 1$

(b) $B_k(w+1) - B_k(w) = k\, w^{k-1}$,

(c) $B_k(1-w) = (-1)^k B_k(w)$.

Schließlich gilt der folgende Zusammenhang:

$$\boxed{\Phi_k'(w) = B_k(w)}$$

Sei zum Beweis $\frac{\partial}{\partial w}$ " die komplexe part. Ableitung bzgl. $w \in \mathbb{C}$, d.h. in $\frac{\partial}{\partial w} f(z,w)$ wird bei fixiertem $z \in \mathbb{C}$ komplex nach w differenziert. So ist

$$\frac{\partial}{\partial w} \frac{e^{wz} - e^z}{e^z - 1} = \frac{z}{e^z - 1} e^{wz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k(w) z^k$$

nach der Definition von $B_k(w)$, andererseits

$$* \quad \frac{e^{wz} - e^{z}}{e^{z} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Phi_k(w) \, z^k \,,$$

wenn man $\Phi_0(w) := w - 1$ vereinbart. Bildet man jetzt $\frac{\partial}{\partial w}$, so folgt die Behauptung durch Koeffizientenvergleich.

ad $*$:
$$\frac{e^{zw} - e^{z}}{e^{z} - 1} = \frac{z}{e^{z} - 1} \cdot e^{z} \cdot \frac{e^{z[w-1]} - 1}{z}$$

mit
$$\frac{1}{z}\left\{ e^{z[w-1]} - 1 \right\} = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(l+1)!} (w-1)^{l+1}}_{= a_l} z^l \,,$$

$$e^{z} \frac{z}{e^{z} - 1} = e^{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k z^k =$$

$$\left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} z^h \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k z^k \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} B_m \frac{1}{(n-m)!} \right)}_{=: \tilde{a}_n} z^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{zw} - e^{z}}{e^{z} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \tilde{a}_\mu \, a_{\nu-\mu} \right) z^\nu =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{\mu=0}^{\nu} \left(\sum_{m=0}^{\mu} \frac{1}{m!} B_m \frac{1}{(\mu-m)!} \right) \cdot \frac{1}{(\nu-\mu+1)!} (w-1)^{\nu-\mu+1} \right] z^\nu$$

beachte
$$\sum_{m=0}^{\mu} \frac{1}{m!} \frac{1}{(\mu-m)!} B_m = \frac{1}{\mu!} \sum_{m=0}^{\mu} \binom{\mu}{m} B_m$$

$$= \frac{1}{\mu!} \left\{ \underbrace{\sum_{m=0}^{\mu-1} \binom{\mu}{m} B_m}_{= 0 \text{ nach der Relation (2)}} + B_\mu \right\} = \frac{1}{\mu!} B_\mu$$

Einsetzen $\Rightarrow$
$$\frac{e^{zw} - e^{z}}{e^{z} - 1} =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{1}{\mu!} B_\mu \frac{1}{(\nu-\mu+1)!} (w-1)^{\nu-\mu+1} \right\} z^\nu =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} \nu! \frac{1}{\mu!} \frac{1}{(\nu-\mu+1)!} B_\mu (w-1)^{\nu-\mu+1} \right\} z^\nu = \qquad \sum_{\mu=0}^{\nu} = \sum_{\mu \geq 1}^{\nu} + \ldots$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\nu} \underbrace{\frac{\nu!}{(\mu-1)!} \frac{1}{(\nu-\mu+1)!}}_{= \binom{\nu}{\mu-1}} \frac{1}{\mu} B_\mu (w-1)^{\nu-\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} (w-1)^{\nu-1} \right\} z^\nu$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu-1} \frac{B_\mu}{\mu} (w-1)^{\nu-\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} (w-1)^{\nu-1} \right\} z^\nu = \quad \uparrow \text{Def}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Phi_\nu(w) z^\nu ,$$

was zu zeigen war. Also gilt auch $*$ und daher $\Phi_k'(w) = B_k(w)$. □

[Eigenschaft a) der B Polynome: $B_k'(w) = k \cdot B_{k-1}(w) \quad \forall k \geq 1$]

11te Vorlesung

Nun zur Zeta-Funktion:

Für komplexe Zahlen ρ mit $\operatorname{Re}\rho > 1$ ist per Definition

$$\boxed{\zeta(\rho) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}} ,$$

wobei $n^\rho = e^{\rho \cdot \ln n}$. Es gilt

$$\left| \frac{1}{n^\rho} \right| = \left| e^{-\rho \ln n} \right| = e^{-(\operatorname{Re}\rho) \cdot \ln n} = n^{-\operatorname{Re}\rho} ,$$

so daß $\zeta(\rho)$ nach Voraussetzung an ρ wohldefiniert ist.

(Bekanntlich: $(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1$)

Wir werden später zeigen:

Partialbruchzerlegung des Kotangens:

$$\pi z \cdot \cot(\pi z) = 1 + z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} \quad , 0 < |z| < 1 .$$

Aus (3) bekommen wir (schreibe dort πz statt z)

$$(3)^* \quad \pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{4^{\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} (\pi z)^{2\nu} , \quad |z| < 1$$

Wir formen die Partialbruchzerlegung um:

$$1 + z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} = 1 + 2z^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{\nu^2}\right) \frac{1}{1 - (z/\nu)^2}}_{= \text{geom. Reihe}} =$$

$$1 + 2z^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\nu^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{-2k} z^{2k} =$$

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2(k+1)} \cdot 2 \right\} z^{2(k+1)} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2k} \right\} z^{2k} \qquad \nu \leftrightarrow k =$$

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ (-2) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2\nu} \right\} z^{2\nu}$$

Koeffizientenvergleich mit (3)* liefert

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2\nu} = (-1)^{\nu} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu} \qquad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

bew:

$$\boxed{\zeta(2\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\nu}} = (-1)^{\nu-1} \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2(2\nu)!} B_{2\nu}}$$

$\forall \nu \in \mathbb{N}$

Damit kennt man die Werte der ζ-Funktion auf allen [geraden] natürlichen Zahlen, denn die $B_{2\nu}$ sind berechenbar. Z.B.:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \text{ usw.}$$

Die Bestimmung von $\zeta(2\nu+1)$ ist viel (!) komplizierter. Erst 1978 wurde z.B. gezeigt: $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$

Die ζ-Funktion ist von großer Bedeutung in der Zahlentheorie ($\rightarrow$ "Primzahlverteilung"), man vergleiche S. Lang, Complex Analysis (3te Ausgabe) Springer, Kap. 16 ff. Z.B.:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ Primzahl}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \pi(n) \cdot \ln n = 1, \quad \pi(n) := \text{Anzahl der Primzahlen} \leq n$$

(Primzahlsatz)

§5 Weitere Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

In Kapitel 3 haben wir schon einige Folgerungen aus der Cauchy-Integralformel für Kreise (Satz 3.4) besprochen, man denke etwa an die Äquivalenz von "holomorph" und "komplex analytisch" oder den Satz von Liouville

SATZ 5.1: (Cauchy-Ungleichungen für das Wachstum von Ableitungen)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D}_R(z_0) \subset U$.

Sei $\delta \in (0, R)$. Dann gilt für $z \in \overline{D}_{R-\delta}(z_0)$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$* \qquad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{R}{\delta} \frac{n!}{\delta^n} \max_{\partial D_R(z_0)} |f|.$$

Bem: ① * besagt, daß man Ableitungen beliebiger Ordnung von f auf kompakten Teilmengen von $D_R(z_0)$, die also insbesondere positiven Abstand zu $\partial D_R(z_0)$ haben, durch das Randmaximum von $|f|$ auf $\partial D_R(z_0)$ beschränken kann. Denkt man an die Integralformel für $f^{(n)}$, so ist dies auch nicht überraschend: man drückt dort ja $f^{(n)}(z)$ durch ein Randintegral von f aus. Die Konstante vor $\max_{\partial D_R(z_0)} |f|$ wird

immer schlechter (d.h. größer), je näher man mit z an $\partial D_R(z_0)$ kommt, da dann $\delta \downarrow 0$.

② Setzt man $z = z_0$, so darf man in $*$ zum Limes $\delta \uparrow R$ übergehen mit dem Ergebnis

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\partial D_R(z_0)} |f|}$$

Schreibt man $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ und beachtet $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$

so folgt: $\left| |a_k| \leq R^{-k} \max_{\partial D_R(z_0)} |f| \right|$

③ Mit $\delta = R/2$ sieht man speziell:

$$\max_{\overline{D}_{R/2}(z_0)} |f^{(n)}(z)| \leq 2^{n+1} \frac{n!}{R^n} \max_{\partial D_R(z_0)} |f|.$$

Beweis V. 5.1: Für $z \in D_R(z_0)$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw$$

Sei $|z - z_0| \leq R - \delta \Rightarrow |w - z| \geq |w - z_0| - |z - z_0|$

$$\geq R - (R - \delta) = \delta$$

für $w \in \partial D_R(z_0)$, also:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} L(\partial D_R(z_0)) \, \delta^{-n-1} \max_{\partial D_R(z_0)} |f|$$

$$= n! \, \frac{R}{\delta^{n+1}} \max_{\partial D_R(z_0)} |f|.$$

□

mit Satz 5.1

Was kann man über Grenzwerte von Folgen holomorpher Funktionen sagen?

SATZ 5.2: Konvergenzsatz v. Weierstraß

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\{f_n\}$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig für eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph und $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ lokal für jede Ableitung.

Bem: der Satz ist falsch für reell analytische Funktionen!

$f_n :=$ Fourierpolynom der Ordnung n einer 2π periodischen Funktion f der Klasse C^1 (aber nicht besser!)

$\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ und f_n reell analytisch (da Summe von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$)

Beweis: Als lokal gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist f stetig. Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck $\subset U$. Es folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$$

nach dem Satz von Goursat für f_n. (Um $\int_{\partial\Delta} \lim f_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n$ zu sehen, parametrisiere man $\partial\Delta$ und benutze entsprechende Vertauschungssätze.) Die Holomorphie von f folgt damit aus Satz 3.5 (Morera).

Sei $\overline{D}_r(z_0) \subset U$. Für $z \in \overline{D}_{r/2}(z_0)$ folgt nach Satz 5.1

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{r} \max_{\partial D_r(z_0)} |f_n(z) - f(z)|,$$

und die rechte Seite geht gegen 0. Also $f_n' \rightrightarrows f'$ auf $D_{r/2}(z_0)$, m.a.W.: $f_n' \rightrightarrows f'$ lokal glm. auf U. Für die höheren Ableitungen schließt man analog. □

Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{R}^2$ nur reell differenzierbar, so ist $f(G)$ i.a. kein Gebiet. Man benötigt etwa $\det Df > 0$, um den Umkehrsatz anwenden zu können. Holomorphe Funktionen dagegen sind gebietstreu, was man mit Satz 5.1 beweist (vgl. Lemma)

SATZ 5.3 : (Gebietstreue)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, also offen und zusammenhängend, und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, aber nicht konstant. Dann ist auch $f(\Omega)$ ein Gebiet.

Zum Beweis brauchen wir ein

Lemma: Sei f holomorph auf einer offenen Umgebung von $\overline{D}_r(z_0)$.

Es gelte $|f(z_0)| < \min_{\partial D_r(z_0)} |f|$. Dann hat f

eine Nullstelle in $D_r(z_0)$.

Beweis: Zunächst ist $\min_{\partial D_r(z_0)} |f| > 0$ nach Voraussetzung, also

$f(z) \neq 0$ auf $\partial D_r(z_0)$; Holomorphie von f auf Umgebung von $\overline{D}_r(z_0)$

ergibt: $f(z) \neq 0$ für alle z aus dem Streifen

$$D_{r+\varepsilon}(z_0) - \overline{D}_{r-\varepsilon}(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : r-\varepsilon < |z-z_0| < r+\varepsilon \}$$

mit $\varepsilon > 0$ genügend klein. Hätte f keine Nullstelle in $D_r(z_0)$, so

wäre $g = 1/f$ holomorph auf $D_{r+\varepsilon}(z_0)$, Satz 5.1 mit $n = 0$

ergibt $|g(z_0)| \leq \max_{\partial D_r(z_0)} |g| \iff$

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{\partial D_r} \frac{1}{|f|},$$

was offenbar der Voraussetzung widerspricht. □

Beweis v. Satz 5.3: Sind $P = f(z)$, $Q = f(w)$ zwei Punkte in $f(\Omega)$,

so kann man z und w mit einem Weg γ in Ω verbinden, $f \circ \gamma$ verbindet

dann P und Q. Also: $f(\Omega)$ gebiet

Zu zeigen bleibt die Offenheit von $f(\Omega)$.

Sei $w_0 \in f(\Omega)$, $w_0 = f(z_0)$. Da f als nichtkonstant angenommen wird, gibt es nach dem Identitätssatz ein $r > 0$ mit

$$f(z) - w_0 \neq 0 \quad \forall\, z \in \overline{D}_r(z_0) - \{z_0\},$$

speziell $|f(z) - w_0| \geq \delta > 0$ auf $\partial D_r(z_0)$ für ein $\delta > 0$.

Sei $w \in D_{\delta/2}(w_0)$. Wir wenden das Lemma an auf die Funktion $\tilde{f} := f - w$. Es ist nämlich

$$|\tilde{f}(z_0)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{\delta}{2} \leq \min_{\partial D_r(z_0)} |\tilde{f}|$$

so daß $\tilde{f}$ eine Nullstelle in $D_r(z_0)$ hat, also $w = f(z)$ für ein $z \in D_r(z_0)$, anders gesagt: $f(D_r(z_0)) \supset D_{\delta/2}(w_0)$.

□

<u>Korollar:</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph

$$\operatorname{Re} f \text{ oder } \operatorname{Im} f \text{ konstant} \implies f \text{ konstant},$$

denn $f(\Omega)$ kann nicht offen sein.

Das Korollar ergibt sich natürlich direkt (ohne 5.3) aus den Cauchy-Riemann Gleichungen.

SATZ 5.4 (Maximumprinzip) Gebiet!

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.

i) Hat $|f|$ in $z_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum, so ist f konstant.

ii) Ist $\overline{\Omega}$ kompakt und f dort stetig, so nimmt $|f|$ sein Maximum am Rand an: $|f(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |f|$ für $z \in \Omega$.

Bem: diese Aussagen sind falsch für nur reell diff'bare Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^2$.

Beweis: i) Sei $z_0 \in \Omega$ und U eine Umgebung von z_0, $U \subset \Omega$, mit

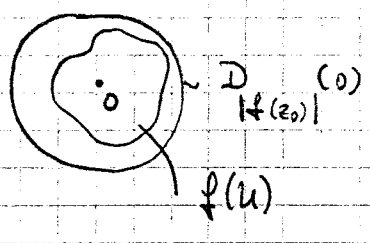
$$* \quad |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in U,$$

d.h.

$$f(U) \subset \overline{D}_{|f(z_0)|}(0),$$

wobei wir o.E. $f(z_0) \neq 0$ annehmen dürfen, denn sonst hätte man nach $*$ $f \equiv 0$ auf U, also (Identitätssatz) $f \equiv 0$ auf Ω.

Es gilt $f(z_0) \in f(U)$,



und da $f(U)$ im Falle $f \not\equiv \text{const}$ offen ist (Satz 5.3), findet man $r > 0$ mit

$$D_r(f(z_0)) \subset f(U) \subset \overline{D}_{|f(z_0)|}(0)$$

Der Punkt $(1 + \frac{r}{2}) f(z_0)$ gehört zu $D_r(f(z_0))$, aber nicht zu $\overline{D}_{|f(z_0)|}(0)$, Widerspruch! Also muß f konstant sein.

ii) $|f|$ hat auf $\overline{\Omega}$ ein Max., liegt dieses auf $\partial\Omega$, so sind wir fertig. Wäre $|f(z_0)| > \max_{\partial\Omega} |f|$ für eine Maximalstelle z_0 von f auf $\overline{\Omega}$, so liegt z_0 im Inneren, was nach i) aber $f \equiv \text{const}$ bedeutet, Wspr! Daher $|f(z_0)| = \max_{\partial\Omega} |f|$.

□

Durch Übergang zu $1/f$ gewinnt man

SATZ 5.5 : (Minimumprinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph

i) Hat $|f|$ in z_0 ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f konstant auf Ω.

ii) Ist $\overline{\Omega}$ kompakt, $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und ohne Nullstelle im Inneren, so gilt $|f(z)| \geq \min_{\partial\Omega} |f|$ für $z \in \overline{\Omega}$.

Beweis: Max.-Prinzip für $1/|f|$ □

Bem: $f(z) = z^2$ zeigt, daß man beim "Minimumprinzip" auf Nullstellen achten muß.

Das Maximumprinzip kann man auch ganz anders ableiten.

DEF 5.1: Mittelwerteigenschaft

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$). f hat auf U die Mittelwerteigenschaft MWE, falls

i) f stetig auf U

ii) zu $z_0 \in U$ gibt es $R > 0$ mit

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, dt$$

für alle $r < R$

Bem: Cauchy Integralformel $\Rightarrow$ holomorphe $f: U \to \mathbb{C}$ haben die MWE

$\Rightarrow$ Re, Im von holomorphen $f: U \to \mathbb{C}$ haben die MWE.

SATZ 5.4*: allgemeines Max.-Prinzip

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f habe die MWE auf U, $z_0 \in U$ sei ein lokales Max. von $|f|$. Dann ist f Konstant auf einer Umgebung von z_0.

Beweis: Für $f(z_0) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $f(z_0) \neq 0$. ($\Rightarrow f = 0$ bei z_0)

Wähle $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, mit $c\, f(z_0) > 0$. Auch cf hat die MWE; gemäß $|cf| = |c|\,|f| = |f|$ ist z_0 lokale Max.-Stelle von cf. Sei $\tilde{f} := cf$. Wir wählen $r > 0$ mit

$$\tilde{f}(z_0) \geq |\tilde{f}(z)| \quad \forall\, z \in \overline{D}_r(z_0)$$

und

$$\tilde{f}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_t(z_0)} \frac{\tilde{f}(z)}{z - z_0}\, dz \quad \forall\, t \leq r$$

$g(z) := \mathrm{Re}\,\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)$ hat die MWE, und es ist

$$g(z) \le |\tilde{f}(z)| - \tilde{f}(z_0) \le 0 \quad , \quad z \in \overline{D}_r(z_0).$$

Gemäß $g(z_0) = 0$ folgt für $0 < \rho \le r$

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{g(z_0 + \rho e^{i\varphi})}_{\le 0}\, d\varphi \le 0,$$

so daß $g(z_0 + \rho e^{i\varphi}) = 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 < \rho \le r$,

also $g \equiv 0$ auf $\overline{D}_r(z_0)$. D.h.:

$$\mathrm{Re}\,\tilde{f} \equiv \tilde{f}(z_0) \quad \text{auf } \overline{D}_r(z_0).$$

Andrerseits: $|\tilde{f}(z)| \le \tilde{f}(z_0) = \mathrm{Re}\,\tilde{f}(z) \le |\tilde{f}(z)|$,

und das geht nur für $\mathrm{Im}\,\tilde{f} \equiv 0$, so daß $\tilde{f} = \mathrm{Re}\,\tilde{f} \equiv \tilde{f}(z_0)$.

Mit $\tilde{f}$ ist auch f konstant auf $\overline{D}_r(z_0)$. □

→ Zum Schluß dieses Abschnitts diskutieren wir noch "ganze Funktionen"

DEF 5.2: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ganze Funktion, wenn f auf (ganz) $\mathbb{C}$ holomorph ist. Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, wird transzendent genannt.

$\sin z$, e^z ... sind offenbar transzendent. Transzendente Funktionen

kommen jedem Wert beliebig nahe, während Polynome jeden Wert annehmen,

dann ist $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom mit $\operatorname{grad} P > 0$, so ist für $w \in \mathbb{C}$

$P(z) - w$ auch ein Polynom, hat also eine Nullstelle. Bei transzendenten

Funktionen lautet die genaue Form dieser Aussage

SATZ 5.6 : (Picard)

> Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzendent und $w_0 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Folge $\{z_n\}$ in $\mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to w_0$

Eine transzendente Fkt. kommt also im Unendlichen jedem Wert beliebig nahe.
Ob w_0 als Funktionswert angenommen wird, kann man nicht sagen!
(Ein anderer Satz v. Picard liefert: f ganz, f läßt mindestens zwei Werte $\in \mathbb{C}$ aus $\Rightarrow$ f konstant; ist also f transzendente Funktion auf $\mathbb{C}$, so kann f höchstens einen Wert auslassen)

Beweis: Da f per Definition keine Polynomfunktion ist, folgt insbesondere $f \neq \text{const}$. Angenommen, es gibt ein $w_0 \in \mathbb{C}$, das im Unendlichen nicht erreicht wird von f. Dann gibt es Zahlen $\varepsilon > 0$, $R > 0$ mit

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \forall \ |z| \geq R.$$

O.E. sei $R \geq 1$. Nach dem Identitätssatz findet man höchstens endlich viele Stellen $z_1, \dots, z_m \in \overline{D}_R(0)$ mit $f(z_R) = w_0$.

Widerum nach dem Identitätssatz$^{3.12}$ ist die Ordnung n_k jeder w_0-Stelle z_k endlich, aus der Bem. nach Def. 3.1 (Nullstellenordnung) folgt:

$$\boxed{g(z) := (f(z) - w_0) \Big/ \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{n_k}}$$

ist ganze Funktion ohne Nullstelle. Wir bilden $1/g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und beachten für $|z| \geq R$

$$|1/g(z)| = \Big| \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{n_k} \Big| \Big/ |f(z) - w_0|$$

$$\leq \varepsilon^{-1} \prod_{k=1}^{m} |z - z_k|^{n_k} \leq \text{const} \; |z|^n$$

mit $n := \sum n_k$ für eine geeignete Konstante, denn $|z_k| \leq R$, so daß $|z - z_k|^{n_k} \leq 2^{n_k} |z|^{n_k}$.

Dann muß $\frac{1}{g}$ ein Polynom sein (s. nächster Satz), und da $\frac{1}{g}$ per Definition ohne Nullstelle ist (g wäre dort ja nicht definiert!), folgt $\frac{1}{g} \equiv \text{const.}$ (Fundamentalsatz der Algebra) Dann ist $g \equiv c$, d.h.

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{n_k} + w_0.$$

Also ist f ein Polynom, Widerspruch!

Bem.: Sind die Stellen $z_1, \ldots, z_k$ gar nicht existent – also $f(z) \neq w_0$ für $z \in \overline{D}_R(0)$ – so wird die Rechnung einfacher: g ist $= f - w_0$.

~~Wobei wir schließen wie oben $g = c$, d.h. $f \equiv w_0 + c$.~~

Als transzendente Funktion kann f (für Def.) nicht konstant sein. Das zeigt im übrigen auch: $\exists z_n \in \mathbb{C}$ mit $|z_n| \to \infty$ und $|f(z_n)| \to \infty$, sonst benutze Liouville.

Nachzutragen bleibt

SATZ 5.7: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Es existieren $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ mit $|f(z)| \leq M \cdot |z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis: Schreibe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $\mathbb{C}$ mit (vgl. Bem. nach S. 1)

! $$|a_k| \leq \rho^{-k} \max_{\partial D_\rho(0)} |f| \Longrightarrow$$

$$|a_k| \leq \rho^{-k} M \cdot \rho^n \quad \forall \rho \geq R$$

Nun wähle $k \geq n+1$ und betrachte $\rho \uparrow \infty \Longrightarrow a_k = 0 \quad \forall k \geq n+1$.

□

Verlangt man in Satz 5.7 die Abschätzung gerade in der anderen Richtung, so werden dadurch ebenfalls Polynome beschrieben:

SATZ 5.8: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz, und es gelte mit $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$

$$|f(z)| \geq M |z|^n \quad \forall |z| \geq R$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\geq n$.

Beweis: Für $|z| \geq R$ ist

$$|f(z)| \geq M R^n > 0,$$

so daß es keine Folge $\{z_n\}$ geben kann mit $|z_n| \to \infty$, $f(z_n) \to 0$.

Nach Satz 5.6 ist f ein Polynom. Sei $m = \operatorname{grad} f$, so daß

$$|f(z)| \leq K |z|^m \qquad \forall\, |z| \geq R$$

mit $K > 0$ geeignet. Es folgt für $|z| \geq R$

$$M |z|^n \leq K |z|^m,$$

also $m \geq n$.

□

Weitere Informationen über ganze Funktionen, z.B.

- S. Lang — Kap 13, p. 356 f.
- Behnke - Sommer — p. 153 f.

§ 6 Harmonische Funktionen

Wir unterbrechen hier kurz das komplexe Programm, um eine Klasse von reellen Funktionen $\mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ vorzustellen, die mit den holomorphen Funktionen eng verwandt sind. Harmonische Funktionen ergeben sich als Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung, auf die man durch viele physikalische Probleme geführt wird. Harmonische Funktionen kennt man auch im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, wo es keine Funktionentheorie gibt, trotzdem sind die Eigenschaften harmonischer Funktionen in der Ebene und im Raum weitgehend dieselben.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

f ist reell beliebig oft differenzierbar mit $(f = g + ih)$

$$\partial_x g = \partial_y h, \quad \partial_y g = -\partial_x h$$

Also:
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g = \partial_x \partial_y h - \partial_y \partial_x h = 0$$

und
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) h = 0 .$$

Man kürzt ab
$$\boxed{\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$$
Laplace-Operator

DEF 6.1: Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. u heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$ auf Ω gilt. Ist u vektorwertig, also $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ mit $k > 1$, so nennt man u harmonisch, wenn $\Delta u^i = 0$ ist für jede Komponente.

Die Beziehung $\Delta u = 0$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist eine lineare partielle Dgl. 2ter Ordnung für u, genannt Laplace-Gleichung.

SATZ 6.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind f (als vektorielle Funktion), $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ harmonisch.

□

Beispiele: ① $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$

$e^x \cos y$, $e^x \sin y$ sind reelle harmonische Funktionen

② $\log \sqrt{x^2+y^2}$ ist auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ harmonisch

(da Re des komplexen Logarithmus)

③ affin lineare Funktionen in zwei Variablen sind harmonisch

Bem: Die Def. reeller (oder vektorwertiger) harmonischer Funktionen auf offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ist völlig analog:

$$u: \Omega \to \mathbb{R}^k \text{ harmonisch} \iff \begin{cases} u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^k) \text{ und} \\ \Delta u := \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} u \equiv 0 \text{ auf } \Omega \end{cases}$$

Satz 6.1 zeigt, daß man reelle harmonische Funktionen $\mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ auf Ω erzeugt, indem man z.B. Re von holom. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ bildet.

Es stellt sich dann natürlich die Frage, ob man so alle reellen harmonischen Funktionen erzeugen kann. Die Antwort lautet ja, zumindest lokal.

SATZ 6.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch.

a) Ist Ω konvex, so gibt es eine bis auf additive Konstanten eindeutig festgelegte harmonische Funktion $\psi: \Omega \to \mathbb{R}$, so daß $\varphi + i\psi$ auf Ω holomorph ist.

b) Ohne top. Bedingungen an Ω gibt es immerhin zu jedem $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung U und eine holomorphe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ mit $\varphi = \operatorname{Re} f$ auf U.

Beweis: a) Sei $g: \Omega \to \mathbb{C}$, $g(z) := \frac{\partial}{\partial x}\varphi(z) - i\frac{\partial}{\partial y}\varphi(z)$.

(Bem zu diesem Ansatz: wenn man $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ finden kann mit $f := \varphi + i\psi$ holomorph, so folgt $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(z) - i\frac{\partial}{\partial y}\varphi(z)$ nach C.R., anders gesagt: unser Ansatz legt – wenn alles Sinn macht – die $\mathbb{C}$-Ableitung der gesuchten Funktion f fest)

Da $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ist nach Def. von "harmonisch", ist g reell stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} g(z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(z) \overset{\Delta\varphi = 0}{=} -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(z) = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} g(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} g(z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right)(z) = -\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} g(z),$$

d.h.: g ist holomorph auf Ω. Wegen der Konvexität gibt es eine (bis auf Konstanten) eindeutige komplexe Stammfunktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zu g: $\ast$ $\boxed{f'(z) = g(z).}$ Aus

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} f(z) - i\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} f(z)$$

$$\overset{\ast}{=} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(z) - i\frac{\partial}{\partial y}\varphi(z)$$

folgt: $\nabla(\varphi - \operatorname{Re} f) \equiv 0$, also

$\ast\ast$ $\underline{\varphi = \operatorname{Re} f + \text{reelle Konstante}}$

Da f ja nur bis auf Konstanten festliegt, wählen wir in $\ast\ast$ die

die reelle Konstante $= 0$. Es folgt $g = \mathrm{Re}\, f$.

b) man benutze a) auf Kreisschalen $\subset \Omega$. □

KOROLLAR: Harmonische Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ sind auf ihrem offenen Definitionsbereich C^∞ (beliebig oft differenzierbar), und man kann sie lokal als "Potenzreihen in zwei Veränderlichen" schreiben.

Bem: 1) Auf den 2^ten Teil des Korollars wollen wir nicht weiter eingehen: man bildet $\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\right\} = \sum \ldots (x-x_0)^l (y-y_0)^m$.

2) Die bisherigen Ausführungen zeigen die Verwandtschaft harmonischer und holomorpher Funktionen, es gibt jedoch Aussagen, die sich nicht übertragen lassen:

$$\begin{cases} f(x,y) = x & \text{harmonisch (klar!) mit} \\ f = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

d.h. harmonische Funktionen können auf einer Menge mit Häufungspunkt im Inneren des Definitionsgebietes verschwinden, ohne daß $f \equiv 0$ folgt.

Die holomorphe Ergänzung $\tilde{f}(z) = z$ von f verschwindet nur für $z = 0$.

M.a.W.: Für harmonische (reell analytische) Funktionen gibt es keinen so starken Identitätssatz.

Das Verschwinden von harmonischen Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ folgt aber, wenn man weiß, daß die Nullstellenmenge offen ist.

SATZ 6.3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt:

$f \equiv 0$ auf $\Omega \iff$ es gilt eine offene Menge $U \neq \emptyset$ in Ω mit $f = 0$ auf U.

Beweis: $\Longrightarrow$ klar!

$\Longleftarrow$ Sei $\Omega_0 := \{ z \in G : \exists$ offene Umg. V von z mit $f = 0$ auf $V \}$.

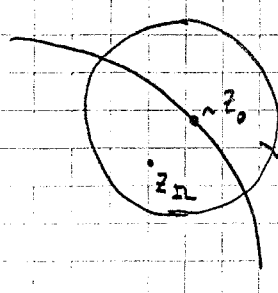
Dann ist Ω_0 per Def. offen und nach Vor. $\neq \emptyset$.

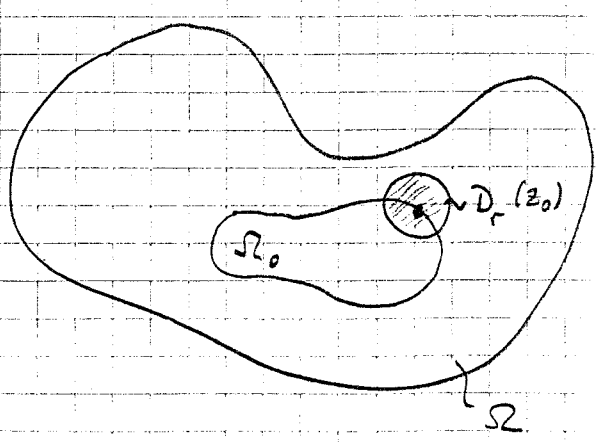
Z.z.: Ω_0 ist relativ abgeschlossen $\subset \Omega$ Daraus folgt wie im Beweis von 3.12 $\Omega_0 = \Omega$.

Sei $z_n \to z_0$, $z_n \in \Omega_0$, $z_0 \in \Omega$. (z.z.: $z_0 \in \Omega_0$)

Man wählt $D_r(z_0) \subset \Omega$ und dazu $F: D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$f|_{D_r(z_0)} = \operatorname{Re} F$.





Für $n \gg 1$ ist $z_n \in D_r(z_0) \cap \Omega_0$,

nach Def. von Ω_0 gibt es um z_n eine Umgebung V mit (o.E.)

$$V \subset D_r(z_0), \quad f = 0 \text{ auf } V$$

Folglich ist $\operatorname{Re} F = 0$ in einer Umg. von z_n, d.i. C.R.-Gleichungen ergeben $F \equiv c$ dort, also (Identitätssatz) $F \equiv c$ auf $D_r(z_0)$. Es folgt $\operatorname{Re} F = 0$ dort, so daß $z_0 \in \Omega_0$. □

Eine direkte Folgerung aus der MWE holomorpher Funktionen ist

SATZ 6.4: (MWE harmonischer Funktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, dt$$

für alle $z_0 \in \Omega$ und alle genügend kleinen Radien r. □

und da für Funktionen mit der MWE das Max.-Prinzip Satz 5.4* gilt, bekommen wir Aus dem Beweis von Satz 5.4* lesen wir ab sodann

SATZ 6.5 Max.-Min.-Prinzip für harm. Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch.

i) Hat f im Inneren ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

ii) Ist $\overline{\Omega}$ kompakt und f stetig auf $\overline{\Omega}$, so nimmt f Max. und Min. auf $\partial\Omega$ an.

weil dort über $|f|$ gerechnet wird ∇

Bem: 5.4* ist nicht direkt zitierbar, aber das Beweisargument greift, z.B.

sei z_0 lokales Max. von f, also

$$f(z_0) \overset{\text{MWE}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + r e^{it})}_{\leq f(z_0)} dt \leq f(z_0)$$

für alle $r \leq r_0$, so daß $f \equiv f(z_0)$ auf $D_r(z_0)$. Satz 6.3 ergibt $f = \text{const}$ auf Ω. Analog für lok. Min. ii) folgt aus i). □

Die Cauchy Integralformel erlaubt eine Integraldarstellung harmonischer Funktionen, die wir jetzt ableiten wollen.

Sei $D = D_R(0)$ und F zunächst holomorph auf einer Umgebung von $\overline{D}$. Dann ist

$$* \quad \begin{cases} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{F(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i R e^{it} \frac{F(R e^{it})}{R e^{it} - z} dt \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(w_t) R^2}{R^2 - \overline{w_t} z} dt \end{cases} \qquad \boxed{w_t := R e^{it}}$$

für $z \in D$. Gibt man hier zu Re, Im über, so ist unklar, was rechts passiert. Deshalb eine Umformung:

Sei $z \in D$ fixiert, also speziell $|z| < R$. Dann ist

$$|w \bar{z}| < R^2$$

für w aus einer Umgebung von $\overline{D}$, d.h.

$$w \mapsto \widetilde{F}(w) := \frac{F(w)}{R^2 - \bar{z} w}$$

ist holomorph auf einer Umgebung von $\overline{D}$, so daß sich $*$ für $\widetilde{F}$ statt F liest

$$\widetilde{F}(z) = \frac{F(z)}{R^2 - |z|^2}$$

$$* \parallel$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{F}(w_t) R^2}{R^2 - \overline{w}_t z} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 F(w_t)}{(R^2 - \overline{w}_t z)(R^2 - \bar{z} w_t)} \, dt .$$

Mit $(R^2 - \overline{w}_t z)(R^2 - \bar{z} w_t) = R^4 - R^2 \bar{z} w_t - R^2 z \overline{w}_t + |z|^2 R^2 \quad (|w_t| = R)$

$$= R^2 |z - w_t|^2$$

folgt

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(w_t) \underbrace{\frac{R^2 - |z|^2}{|z - w_t|^2}}_{\text{reell!}} dt, \qquad w_t = R e^{it}}$$

DEF 6.2: Die Funktion P_R ; $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ - Diagonale $\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$P_R(w, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - w|^2}$$

heißt **Poisson - Kern** für $D_R(0)$.

Bem: Schreibt man $w = R e^{it}$, $z = r e^{i\tau}$, so folgt

$$P_R(w,z) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\tau) + r^2}$$

SATZ 6.6 : Poisson'sche Integralformel

a) Sei $f : \overline{D}_R(0) \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf $D_R(0)$

Dann gilt für $z \in D_R(0)$

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt,$$

$$w_t = R e^{it}$$

b) Sei $h : \partial D_R(0) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$f(z) := \int_0^{2\pi} h(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt \quad , \quad z \in D_R,$$

harmonisch auf $D_R(0)$.

Bem : ① Nach a) wird die harmonische Funktion auf D_R vollständig durch ihre Werte am Rand festgelegt.

② Wir werden b) später verschärfen und zeigen, daß f stetig auf $\overline{D}_R(0)$ mit Randwerten h fortgesetzt werden kann.

Beweis : a) Sei $D = D_R(0)$ und f zunächst harmonisch auf einer Umgebung von $\overline{D}$. Man schreibt $f = \mathrm{Re}\, F$

mit $F: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \supset \overline{D}$ offen. Dann ist nach der Rechnung

$$F(z) = \int_0^{2\pi} F(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt \qquad , z \in D,$$

also (da P_R $\mathbb{R}$-wertig)

$$f(z) = \operatorname{Re} F(z) = \int_0^{2\pi} f(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt .$$

Jetzt sei f nur noch wie in a). Man wählt $r_\nu \uparrow 1$ und setzt

$$f_\nu(z) := f(r_\nu z) \qquad , z \in \overline{D}_{\frac{R}{r_\nu}}(0),$$

f_ν ist harmonisch auf $D_{R/r_\nu}(0) \supset\supset \overline{D}_R(0)$, so daß nach dem 1^{ten} Beweisteil

$$f_\nu(z) = \int_0^{2\pi} f_\nu(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt \qquad \forall\, |z| < R.$$

Offenbar gilt $f_\nu \rightrightarrows f$ auf $\overline{D}$, so daß man in obiger Formel links und rechts zum Limes übergehen kann mit dem gewünschten Ergebnis.

b) Sei $w \in \partial D$. Dann ist

$$z \mapsto P_R(w, z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\,\frac{w+z}{w-z}\right)$$

<u>harmonisch auf D</u>, da Realteil einer holomorphen Funktion. Es folgt

$$\Delta \int_0^{2\pi} h(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt = \int_0^{2\pi} h(w_t)\, \Delta_{(z)} P_R(w_t, z)\, dt = 0,$$

da die Vertauschung von Δ und $\int_0^{2\pi}$ erlaubt ist.

$\square$

→ 16.6

← Antwort auf die Frage: Wie konstruiert man harmonische Funktionen mit gegebenen Randwerten?

SATZ 6.7 : (Verschärfung von 6.6 b)

Es sei $h : \partial D_R(0) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$f(z) := \begin{cases} h(z), & |z| = R \\ \int_0^{2\pi} h(w_t)\, P_R(w_t, z)\, dt, & |z| < R \end{cases}$$

stetig auf $\overline{D}_R(0)$ und harmonisch im Inneren.

?

Beweis: Da f nach 6.6 b) harmonisch ist auf $D = D_R(0)$, folgt die Stetigkeit von f in Punkten $z \in D$. ("Stetigkeit im Inneren")

Sei also $z_0 \in \partial D$, o.E. gelte $R = 1$, $z_0 = e^{it_0}$ mit $t_0 \in [0, 2\pi)$.

Zu zeigen ist :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad |f(z) - h(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in \overline{D},\ |z - z_0| < \delta$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, da $h : \partial D \to \mathbb{R}$ stetig sein soll, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit

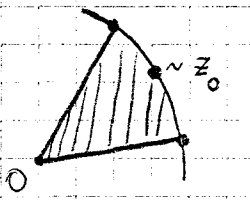
$$(1) \quad |h(z) - h(z_0)| < \varepsilon \quad \forall \; z \in \partial D \cap D_{\delta_1}(z_0).$$

Zur Vereinfachung sei $t_0 > 0$ (im Fall $t_0 = 0$ betrachte man nachfolgend das Intervall $[0, 2\delta_0]$) und $\delta_0 > 0$, so daß

$$\rceil := [t_0 - 2\delta_0, t_0 + 2\delta_0] \subset (0, 2\pi).$$

S bezeichne den Sektor

$$S = \{ z \in D : z = r e^{it}, 0 \le r \le 1, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \}$$

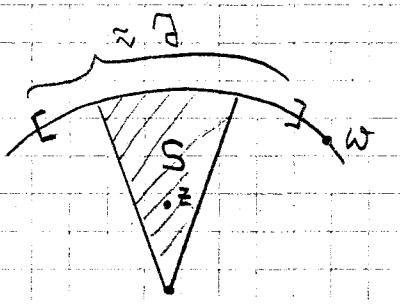


,

in Abwandlung von (1) können wir wegen der Stetigkeit von h in z_0 $\delta_0 \le \delta_1$ auch so klein machen, daß

$$(1)' \quad |h(e^{it}) - h(z_0)| < \varepsilon/2$$

für alle $t \in \rceil$.



Für $z \in S$ und

$w = e^{it}$ mit $t \notin \rceil$ ist $|w - z| \ge c$ mit $c > 0$.

Als letzte Vorbereitung beachten wir

$$1 = \int_0^{2\pi} P_1(w_t, z)\, dt$$

für $z \in D$, denn die konstante Funktion 1 ist harmonisch auf D, so daß 6.6 a greift.

Für $z \in S$ folgt nun

$$f(z) - f(z_0) = \int_0^{2\pi} \left(h(w_t) - h(z_0) \right) P_1(w_t, z)\, dt =$$

$$\int_{\gamma} \ldots\, dt + \int_{[0,2\pi]-\gamma} \ldots\ldots = : \alpha + \beta$$

mit

$$|\alpha| \leq \int_{\gamma} |h(w_t) - h(z_0)| \underbrace{P_1(w_t, z)}_{>0}\, dt \overset{(1)}{\leq}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{\gamma} P_1(w_t, z)\, dt \leq \varepsilon/2 \,,$$

$$|\beta| \leq \int_{[0,2\pi]-\gamma} \left(|h(w_t)| + |h(z_0)| \right) \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|w_t - z|^2}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \sup_{\partial D} |h| \int_{[0,2\pi]-\gamma} \frac{1-|z|^2}{|w_t - z|^2}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi} c^{-2} \sup_{\partial D} |h| \cdot \int_{[0,2\pi]-\gamma} 1-|z|^2\, dt$$

$$\leq 2 \cdot c^{-2} \sup_{\partial D} |h| \cdot \left(1-|z|^2\right)$$

Sei nun $\delta \leq \delta_0$ so klein, daß für $z \in S \cap D_\delta(z_0)$

$$1-|z|^2 < \frac{1}{2} c^2 \cdot \sup_{\partial D} |h| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann folgt $|\alpha| + |\beta| < \varepsilon$, also $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. □

Bem: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $h: \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Die Aufgabe

"Finde $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig, harmonisch auf Ω mit

$f|_{\partial\Omega} = h$."

heißt das Dirichletproblem für den Laplace-Operator auf Ω zu Randwerten h.

KOROLLAR: Auf Kreisscheiben ist das Dirichletproblem eindeutig lösbar bei beliebiger Vorgabe stetiger Randwerte.

(Wir haben die Lösungsformel nur für 0 als Mittelpunkt aufgeschrieben, ist der Mittelpunkt z_0 beliebig, so nimmt man eine Translation vor.)

Das Dirichletproblem für Δ ist auch in Dimensionen $n \geq 3$ und für beliebige Gebiete lösbar, das wird in Vorlesungen über Partielle Differentialgleichungen bewiesen. Wir können zeigen (für allg. Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nicht notwendig Kreisscheiben)

SATZ 6.8: "Eindeutigkeit"

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $h: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es höchstens eine Lösung des Dirichletproblems.

Beweis: Seien $f_1, f_2 \in C^0(\overline{\Omega})$ harmonisch auf Ω mit $f_1 = f_2$ auf $\partial\Omega$. $f_1 - f_2$ nimmt Max. u. Min auf $\partial\Omega$ an, also $f_1 - f_2 = 0$. □

Zum Schluß noch eine andere Beschreibung harmonischer Funktionen.

SATZ 6.9: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

f hat die MWE $\Leftrightarrow$ f ist harmonisch.

Beweis: $\Leftarrow$ " ✓

$\Rightarrow$ " Sei $D_R(z_0) \subset\subset U$, $g: \overline{D}_R(z_0) \to \mathbb{R}$ sei stetig, harmonisch in $D_R(z_0)$ mit Randwerten f. Dann hat $f - g$ auf $D_R(z_0)$ die MWE. Außerdem gilt Satz 6.5 auch dann, wenn man "harmonisch" durch MWE ersetzt (das zeigt der Beweis!), also nimmt $f - g$ Max. u. Min. auf $\partial D_R(z_0)$ an, so daß $f = g$ auf $D_R(z_0)$. Folglich stimmt f lokal auf U mit harmonischen Funktionen überein, ist also harmonisch. □

§ 7 Ketten, Zyklen, Homologie und Homotopie: allgemeine Form des Cauchy Integralsatzes

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $H(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$.

Problem ①: Sei γ geschlossener Weg in G. Welche Bedingung muß γ erfüllen, damit $\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in H(G)$?

Problem ②: Welche Bedingungen muß G erfüllen, damit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in H(G) \text{ und } \forall \gamma \subset G \text{ geschlossen} \; ?$$

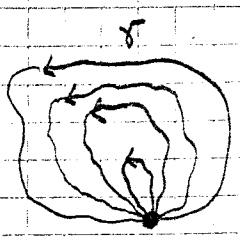
Bei ② möchte man die Gebiete beschreiben, für die der Cauchy Integralsatz gilt, bei ① möchte man für eine spezielle Kurve entscheiden, ob das Umlaufintegral verschwindet.

Wir wissen bereits: G konvex $\Rightarrow$ ② hat positive Antwort,

und wir werden zeigen:

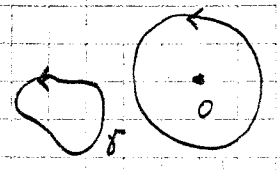
Der Cauchy Integralsatz gilt für einfach zusammenhängende G.

Das sind Gebiete, in denen man jede geschlossene Kurve in einen Punkt deformieren kann, ohne G zu verlassen.



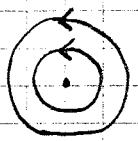
$\mathbb{C} - \{0\}$ ist anschaulich nicht von diesem Typ, man betrachte Kreise um 0, und wir wissen ja auch schon

$$\int_{\partial^+ D_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad !$$



Für andere geschlossene Kurven γ (z.B. $\partial D_r(z_0)$, $z_0 \neq 0$, $r < |z_0|$) gilt dagegen $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$, so daß man auf Problem ① geführt wird. Mit ① verwandt ist folgende Frage:

> Sei f holomorph auf $D_R(z_0) - \{z_0\}$. Gilt dann
>
> $$\int_{\partial^+ D_\rho(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial^+ D_r(z_0)} f(z)\,dz$$
>
> für Radien $0 < \rho, r < R$?



Die Vermutung ist „ja" und wird durch $f(z) = 1/z$, $z_0 = 0$, gestützt, allerdings folgt die Vermutung noch nicht aus unseren bisherigen Überlegungen.

Wir benötigen einige technische Vorbereitungen

Ketten und Zyklen :

Wir geben zunächst eine kurze formale Definition, merken sollte man sich nur die anschauliche Bedeutung. Ab jetzt ist $G \subset \mathbb{C}$ ein fixiertes Gebiet, also eine offene Menge, in der man zwei beliebige Punkte verbinden kann.

Sei Γ ein Weg in G, $\Gamma : [a,b] \to G$. Wir schreiben

$$[\![\Gamma]\!] : \{ \text{stetige Fktn } G \to \mathbb{C} \} \to \mathbb{C},$$

$$[\![\Gamma]\!] (f) := \int_\Gamma f(z)\, dz$$

für das von Γ induzierte lineare Funktional "Integral über Γ".

Lineare Funktionale kann man addieren und mit Skalaren $\in \mathbb{C}$ multiplizieren:

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ Wege in G

$$c_1 [\![\Gamma_1]\!] + \dots + c_n [\![\Gamma_n]\!] \ (f) =$$

$$c_1 \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \dots + c_n \int_{\Gamma_n} f(z)\, dz$$

DEF 7.1: Eine **Kette** (in G) ist eine Linearkombination

$$m_1 [\![\Gamma_1]\!] + \dots + m_n [\![\Gamma_n]\!]$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $m_k \in \mathbb{Z}$ und Wegen $\Gamma_k \subset G$.

Bem: ① Die Ketten bilden bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe.

② Ist $\sum_{k=1}^{n} m_k [\![\Gamma_k]\!]$ eine Kette in G und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so sagt man:

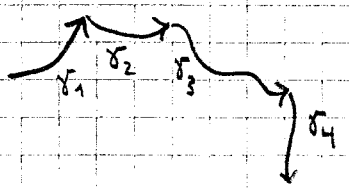
$$\sum_{k=1}^{n} m_k [\![\Gamma_k]\!] \quad (f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{\Gamma_k} f(z)\, dz$$

ist das Integral von f über die Kette.

③ Interpretation: Ketten $\sum m_k [\![\gamma_k]\!]$ in G sollte man sich nicht als lineare Funktionale $C^0(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ vorstellen, sondern als System der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, wobei jeder Weg mit einer Vielfachheit $m_k \in \mathbb{Z}$ gezählt wird. $m_k < 0$ bedeutet anschaulich, daß γ_k mit umgekehrter Orientierung zu nehmen ist. Dies ist konsistent mit der Regel

$$[\![\gamma^-]\!] = -[\![\gamma]\!] .$$

Ist die Zusammensetzung $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n$ definiert, so gilt:



$$[\![\gamma_1 \cdots \gamma_n]\!] = \sum_{i=1}^{n} [\![\gamma_i]\!]$$

Schreibweise ab jetzt: $m_1 \gamma_1 + \dots + m_n \gamma_n$ statt $m_1 [\![\gamma_1]\!] + \dots + m_n [\![\gamma_n]\!]$

④ Die Kette $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n$ ist keinesfalls zu verwechseln mit der Kurve $\beta: [a,b] \ni t \mapsto m_1\gamma_1(t) + \dots + m_n\gamma_k(t) \in \mathbb{C}$:

eine Kette wirkt ja via Integration auf Funktionen und nicht auf die Zeitvariable t. Außerdem ist β i.a. auch gar kein Weg in G.

Folgende Def verallgemeinert das Konzept der geschlossenen Wege:

DEF 7.2: Sei $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n$ eine Kette. Alle Wege seien über $[0,1]$ parametrisiert. $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_k$ heißt Zyklus, falls

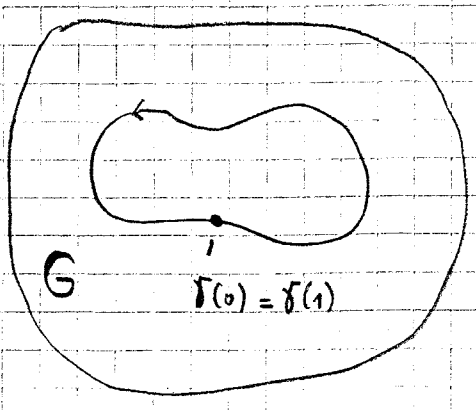
$$* \quad \sum_{\gamma_k(0)=z} m_k = \sum_{\gamma_k(1)=z} m_k \qquad \forall z \in G$$

Hier: γ_k nicht notwendig geschlossen!

Interpretation:

① Was prüft man in $*$? Man wählt irgendeinen Punkt $z \in G$ und wählt die Kurven γ_k mit $\gamma_k(0) = z$ als Anfangspunkt und bildet sodann die Summe der zugehörigen Gewichte m_k ($\sum := 0$, wenn z auf keiner Kurve liegt oder kein Anfangspunkt ist). Das Ergebnis muß übereinstimmen mit der Zahl, die angibt, wie oft z als Endpunkt mit entsprechendem Gewicht vorkommt.

(2)



Sei γ geschlossener Weg wie gezeichnet.

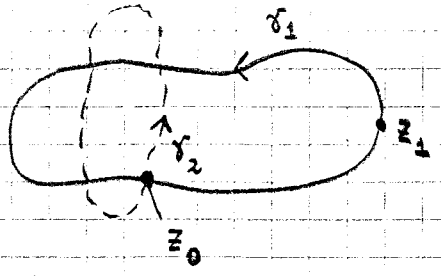
Dann sind beide Seiten von $*$

$$= \begin{cases} 0, & z \neq \gamma(0) \ (= \gamma(1)) \\ 1, & z = \gamma(0) = \gamma(1) \end{cases}$$

Also sind geschlossene Wege spezielle Zyklen.

(3) $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene Wege, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$

$m_1 \gamma_1 + \cdots + m_n \gamma_n$ Zyklus (D.h.: Zyklen = Untergruppe der Ketten)



$\| \quad \gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2$

Nachrechnen der Bdg:

a) Ist $z_0 = \gamma_k(0) = \gamma_k(1)$, $k = 1, 2$, so gilt:

$$\sum_{\gamma_k(0) = z_0} m_k = 1 - 2 = \sum_{\gamma_k(1) = z_0} m_k$$

Für $z \neq z_0$ sind beide Summen 0.

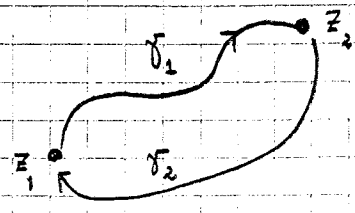
b) Gilt $\gamma_2(0) = \gamma_2(1) = z_0$, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = z_1$,

so liefern die Summen in $*$ nur Beiträge für z_0 oder z_1,

und zwar -2 für z_0 und 1 für z_1.

④ Zykl müssen nicht aus geschlossenen Wegen aufgebaut sein:

a)



γ_1, γ_2 = entgegengesetzt orientierte Verbindungen von z_1, z_2

„$\gamma_1 + \gamma_2$"

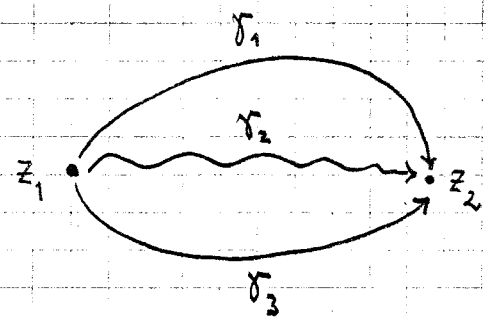
$$\sum_{\gamma_k(0) = z_1} m_k = 1 = \sum_{\gamma_k(1) = z_1} m_k$$

1 ↑ A.P. von γ_1

$\sum$ ↑ E.P. von γ_2

entsprechend für z_2, andere z liefern keinen Beitrag.

b)



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}$ wie gezeichnet

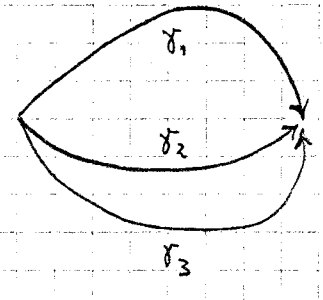
$\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3$ ist Zyklus:

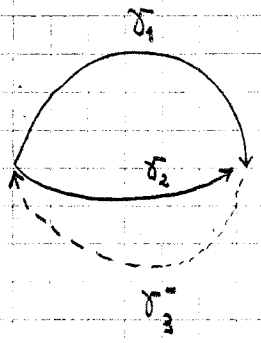
$$\sum_{\gamma_k(0) = z_1} m_k = 1 + 1 - 2 = 0 = \underbrace{\sum_{\gamma_k(1) = z_1} m_k}_{\text{leere Summe}}$$

$$\underbrace{\sum_{\gamma_k(0) = z_2} m_k}_{\text{leere Summe}} = 0 = 1 + 1 - 2 = \sum_{\gamma_k(1) = z_2} m_k$$

Für andere z sind beide Summen 0.

⑤ Obwohl ein Zyklus $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n$ nicht aus geschlossenen Bausteinen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ bestehen muß, kann man sich überlegen: Eine Kette $m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n$ ist ein Zyklus genau dann, wenn man die vorkommenden Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ zu einem oder mehreren geschlossenen Wegen aneinandersetzen kann, wobei die Wege γ_i mit $m_i < 0$ mit umgekehrter Orientierung ($|m_i|$-fach) zu durchlaufen sind.





Zyklus $\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 \rightsquigarrow$ 2 geschlossene Wege: $\gamma_1\gamma_3^-$, $\gamma_2\gamma_3^-$

→ Wiederholen: Def. Kette, Bedingung * bei Zyklen

SATZ 7.1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

f hat eine Stammfunktion $\iff$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall \text{ Zykel } \gamma \text{ in } G$$

bzw. Einmaligkeit

Bem: Ist $\gamma = \sum_{k=1}^{n} m_k \gamma_k$ Kette (Zyklus) in G und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig, so ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \quad \left(= [\![\gamma]\!](f) \right)$$

Beweis: $\Leftarrow$ " ist klar, da dann speziell $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege $\subset G$; benutze Satz 2.3.

$\Rightarrow$ " Sei $F' = f$ mit holomorphem $F: G \to \mathbb{C}$. Es folgt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \quad \uparrow\ \gamma_k : [a,b] \longrightarrow G$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \left(F(\gamma_k(b)) - F(\gamma_k(a)) \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k F(\gamma_k(b)) - \sum_{k=1}^{n} m_k F(\gamma_k(a)) =$$

$$\sum_{z \in S} F(z) \cdot \sum_{\gamma_k(b)=z} m_k - \sum_{z \in S} F(z) \cdot \sum_{\gamma_k(a)=z} m_k =$$

$$\sum_{z \in S} F(z) \left\{ \sum_{\gamma_k(b)=z} m_k - \sum_{\gamma_k(a)=z} m_k \right\}$$

mit $S := \{ \gamma_k(t) : k = 1, \dots, n,\ t = a, b \}$ (alle Anfangs- und Endpunkte)

Die Formel $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z \in S} F(z) \left\{ \sum_{\gamma_k(b)=z} m_k - \sum_{\gamma_k(a)=z} m_k \right\}$

gilt für beliebige Ketten. Ist γ ein Zyklus, so verschwindet per Definition $\{ \dots \}$, also $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. $\square$

Wir wollen uns jetzt mit dem eingangs genannten Problem ① beschäftigen.

also entscheiden, welche Eigenschaften eine geschlossene Kurve γ im Gebiet G haben muß, damit $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Die bestimmende Größe ist die Windungszahl von γ, die bereits in § 3 (p. 69) erklärt wurde. Wir verallgemeinern diese Definition.

DEF 7.3: Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$, $z \notin \text{Spur } \Gamma := \bigcup_{k=1}^{n} \text{Spur } \gamma_k$. Dann heißt

$$\eta(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} \qquad \Gamma = \sum m_k \gamma_k$$

die Windungs- oder Umlaufzahl von Γ bzgl. z.

Beispiele u. Bem.:

① Regeln: a) Γ_1, Γ_2 Zykel, $z \notin \text{Spur } \Gamma_1 \cup \text{Spur } \Gamma_2$

(Additivität) $\eta(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = \eta(\Gamma_1, z) + \eta(\Gamma_2, z)$

b) $\eta(-\Gamma, z) = -\eta(\Gamma, z)$

(triviale Folgerungen aus der Definition)

② geometrische Interpretation: $\eta(\Gamma, z)$ gibt an, wie oft die

Kurve Γ den Punkt z umschließt, wobei mit Vorzeichen unterschieden wird, ob Γ den Punkt im math. positiven Sinn umfahrt oder aber in entgegengesetzter Richtung.

Wir werden gleich zeigen $\eta(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ und später auch die geometrische Vorstellung rechtfertigen.

Beispiele

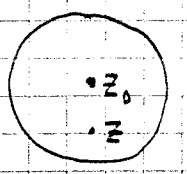
(3) Sei $\gamma(t) = z_0 + r e^{imt}$, $t \in [0, 2\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$

a) $\eta(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} imr e^{imt} r^{-1} e^{-imt} dt = m$

Hier stimmt also die geometrische Vorstellung.

b) $m = 1$: $\eta(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_r(z_0)} \frac{dw}{w-z} = 1$

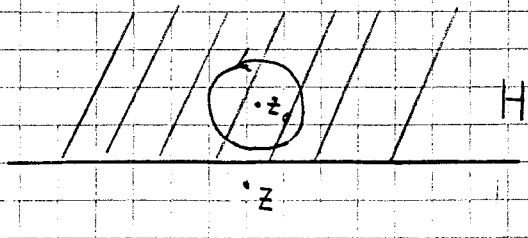
$\forall\, z \in D_r(z_0)$



Dies folgt z.B. aus der Cauchy-Integralformel.
(vgl. das Lemma auf p. 68)

c) Sei $z \in \mathbb{C} - \overline{D}_r(z_0)$

Man wählt z.B. eine offene Halbebene H mit $z \notin \overline{H}$ und $H \supset \operatorname{Spur} \gamma$.



$w \mapsto \frac{1}{w-z}$ ist holomorph auf der konvexen Menge H, nach Satz 3.3 folgt $\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 0$, also $\eta(\gamma, z) = 0$.

SATZ 7.2: Sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$, $z \notin \operatorname{Spur}\Gamma$. Dann ist

$$\eta(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dw}{w-z} \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Im Fall $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} m_k \gamma_k$ mit geschlossenen Kurven

$\gamma_k : [a,b] \to \mathbb{C}$ folgt die Beh. aus (vgl. früheres Lemma!)

$$\eta(\gamma_k, z) \in \mathbb{Z} \quad \text{und}$$

$$\eta(\Gamma, z) = \sum_{k=1}^{n} \eta(\gamma_k, z)\cdot m_k .$$

Sind die γ_k nicht geschlossen, so muß man in den Beweis des Lemmas zurückgehen, wobei man wie dort alle γ_k als C^1-Funktionen $[a,b] \to \mathbb{C}$ annehmen kann.

Sei $\phi_k(\rho) := \int_a^{\rho} \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t)-z}\,dt$, $\rho \in [a,b] \Rightarrow$ (für $\rho = b$ ist $\phi_k(b) = \int_{\gamma_k}\frac{dw}{w-z}$)

$$\phi_k'(\rho) = \gamma_k'(\rho)\,/\,(\gamma_k(\rho)-z) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\rho}\left\{ e^{-\phi_k(\rho)}\,(\gamma_k(\rho)-z)\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e^{\phi_k(\rho)} = c_k\,(\gamma_k(\rho)-z) \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C},\ a \le \rho \le b$$

Zur Bestimmung von c_k wähle

$r \cap = a$: $\quad 1 = c_k \left(\gamma_k(a) - z \right) \quad \Longrightarrow$

$$e^{\phi_k(r)} = \frac{\gamma_k(r) - z}{\gamma_k(a) - z}, \quad a \le r \le b.$$

Es folgt: $\left(\text{Kurzschr.: } \phi_k(b) = \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w - z} \right)$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \, \phi_k(b) \right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\phi_k(b) \right)^{m_k} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\gamma_k(b) - z \right)^{m_k} \Big/ \prod_{k=1}^{n} \left(\gamma_k(a) - z \right)^{m_k}$$

Sei $S := \{ \gamma_k(t) : k = 1, 2, \dots, n, \; t = a, b \}$. $\Longrightarrow$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\gamma_k(b) - z \right)^{m_k} = \prod_{w \in S} \prod_{\{k : w = \gamma_k(b)\}} (w - z)^{m_k} =$$

$$\prod_{w \in S} (w - z)^{\sum_{\{k : \gamma_k(b) = w\}} m_k} \quad \swarrow = \quad \Gamma \text{ Zyklus}$$

$$\prod_{w \in S} (w - z)^{\sum_{\{k : \gamma_k(a) = w\}} m_k} = \prod_{k=1}^{n} \left(\gamma_k(a) - z \right)^{m_k} \quad \text{Einsetzen} \Longrightarrow$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \phi_k(b) \right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \, \phi_k(b) \in 2\pi i \, \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \eta(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} m_k \, \phi_k(b) \in \mathbb{Z}.$$

□

Notation: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $z_0 \in U$, so nennt man

$$V(z_0) := \{ z \in U : \; z \text{ ist mit } z_0 \text{ in } U \text{ verbindbar} \}$$

die Zusammenhangskomponente von z_0. Es gilt:

i) $V(z_0)$ ist per Definition offen und zusammenhängend.

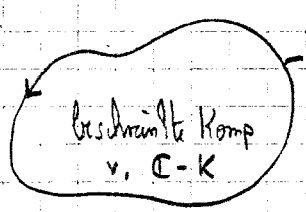
ii) Zwei Komponenten sind entweder disjunkt oder gleich.

iii) U gebiet $\Rightarrow \quad U = V(z_0) \quad \forall z_0 \in U$

iv) Es gibt höchstens abzählbar viele Komponenten.

v) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. $\mathbb{C} - K$ hat genau eine unbeschränkte Komponente.

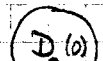
Beweis v, v): nächste Seite



Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

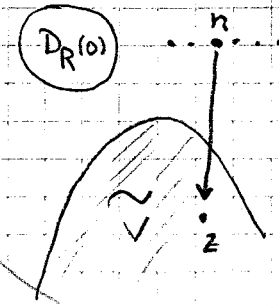
$n \notin K$ ab einem Index n_0,

denn $K \subset \overline{D}_R(0)$ für ein passendes R; trivialerweise liegen die natürlichen Zahlen in derselben Komponente V,



da man sie durch eine Strecke verbinden kann, die K nicht trifft.

Sei $\widetilde{V}$ auch unbeschränkte Komponente.



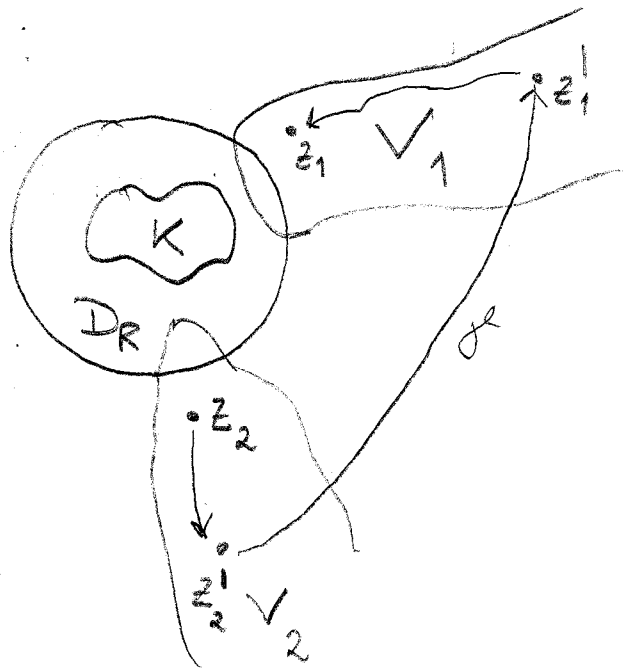
Wählt man $z \in \widetilde{V}$, $|z| \gg 1$,

so trifft für $n \in V$, $n \gg 1$, die

Strecke von n nach z die Menge K nicht, also $z \in V$ und daher $V = \widetilde{V}$.

Beweis von v): $K \subset \overline{D_R}(0)$ für $R >> 1$

Seien V_1, V_2 unbeschränkte Komponenten von $\mathbb{C}-K$. Wähle $z_k \in V_k$ beliebig sowie $z_k' \in V_k$ mit $|z_k'| \geq R \cdot 2$



$\exists$ Kurve γ in $\mathbb{C} - D_{2R}(0) \subset \mathbb{C}-K$ von z_2' nach z_1'.

Sei $\gamma_2 \subset V_2$ Kurve von z_2 nach z_2', $\gamma_1 \subset V_1$ Kurve von z_1' nach z_1.

$\Rightarrow$ $\gamma_2 \gamma \gamma_1$ läuft in $\mathbb{C}-K$ von z_2 nach z_1

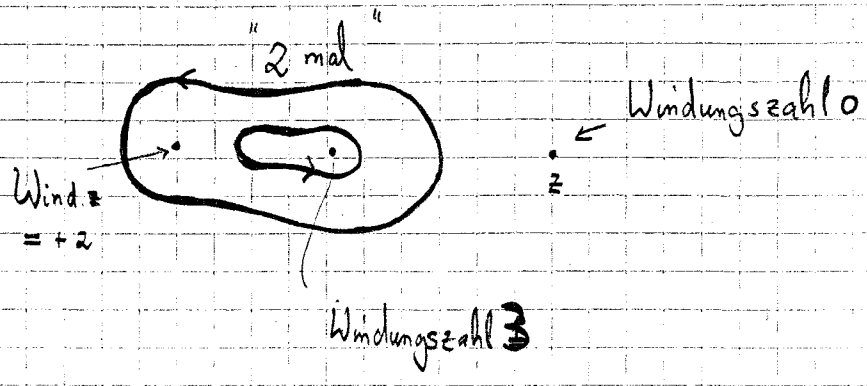
$\Rightarrow$ z_1, z_2 liegen in der selben Komponente

SATZ 7.3 : Sei Γ ein Zyklus. Die Umlaufzahl

$$\mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma \ni z \mapsto \eta(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$$

ist konstant auf jeder Komponente von $\mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma$ und $= 0$

auf der unbeschränkte Komponente.



Beweis: Sei $\Gamma = \sum m_k \gamma_k$; die Funktion

$$(w, z) \longmapsto \frac{1}{w - z}$$

ist stetig auf $\operatorname{Spur}\Gamma \times (\mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma)$, so daß

$$\phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w - z} \cdot m_k$$

stetig ist auf $\mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma$. Gemäß Bild $\phi \subset \mathbb{Z}$ ist ϕ lokal

konstant, also konstant auf den Komponenten von $\mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma$.

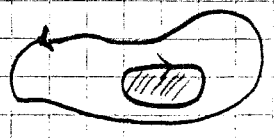
Nun wähle z_N aus der unbeschränkten Komponente mit $|z_N| \longrightarrow \infty$.

Es folgt

$$|\phi(z_N)| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{|m_k|}_{\leq} \frac{1}{2\pi} \text{ Länge } \gamma_k \Big) \Big/ \min_{w \in \operatorname{Spur}\Gamma} |z_N - w| \qquad \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \,,$$

also $\phi \equiv 0$ auf der unbeschränkten Komponente.

Bem: Auch andere Komponenten können Umlaufzahl 0 haben!



Im schraffierten Bereich ist $\eta(\Gamma,\cdot) = 0$.

DEF 7.4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.

a) Ein Zyklus $\Gamma \subset U$ heißt nullhomolog in U, falls

$$\eta(\Gamma,\cdot) \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{C} - U.$$

b) Die Zyklen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ heißen homolog in U $\iff$

$\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog in U.

Bspl+Bem:

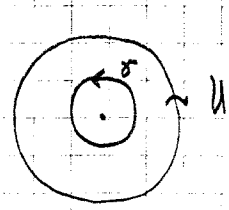
① "Nullhomolog" ist keine Eigenschaft von Γ allein, sie hängt sowohl ab vom Zyklus Γ als auch von der offenen Menge U.

② a) $U = \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

γ nullhomolog in $\mathbb{C}$, da $\mathbb{C} - U = \emptyset$

Jeder Zyklus ist trivialerweise in $\mathbb{C}$ 0-homolog.

b) $U := D_2(0)$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$



$\mathbb{C} - U = \{ z : |z| \ge 2 \} \Longrightarrow$

$w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph auf der konvexen Menge U $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \eta(\gamma, z) = 0$ für $|z| > 2 \Rightarrow \gamma$ 0-homolog in $D_2(0)$.

c) $U = D_2(0) - \{0\}$, $\gamma(t)$ wie oben

$\mathbb{C} - U = \{0\} \cup \{z : |z| \geq 2\}$

$\eta(\gamma, z) = 0$ für $|z| \geq 2$, aber

$\eta(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w} = 1$

$\Rightarrow \gamma$ nicht 0 homolog in U.

Wir können jetzt Problem ① lösen und den Cauchy Integralsatz wie folgt verallgemeinern.

SATZ 7.4: Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes und der Integralformel

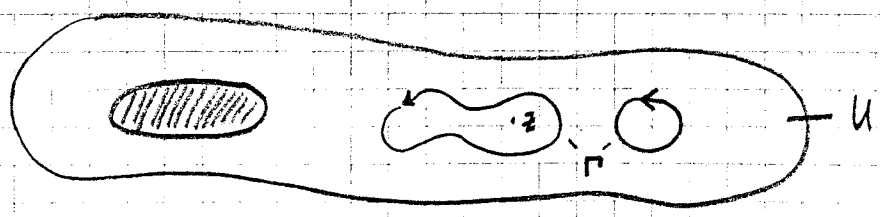
Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und Γ ein 0-homologer Zyklus in U.

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt:

Integralsatz → (1) $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.

" formel → (2) Für $z \in U - \text{Spur } \Gamma$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\eta(\Gamma, z)\, f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw$$



Beweis: Wir beginnen mit

(z) Sei $k = 0$, der Fall $k \geq 1$ folgt durch Differentation (unter dem Integral) aus der Formel für $k = 0$.

Sei $z \in U - \text{Spur}\,\Gamma$. Wegen

$$\gamma(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}$$

ist $$-f(z) \cdot \gamma(\Gamma, z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw =: h(z).$$

→ Ziel: $h \equiv 0$ mit Liouville

Wir zeigen: (*) h läßt sich holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.
(beachte: h nur auf $U - \text{Spur}\,\Gamma$ definiert, setze h zunächst auf U fort, dann auf $\mathbb{C}$!)

ad *: Sei $g : U \times U \to \mathbb{C}$,

1te Schritt: Fortsetzung auf U

$$g(w, z) := \begin{cases} f'(z), & w = z \\ \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z \end{cases}.$$

Übungsaufgabe: g ist stetig als Funktion zweier komplexer Argumente

(D.h.: Zu $(w_0, z_0) \in U \times U$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$|g(w, z) - g(w_0, z_0)| < \varepsilon$$

für alle $(w, z) \in D_\delta(w_0) \times D_\delta(z_0)$.)

$\Longrightarrow$ $h_0 : U \to \mathbb{C}$, $h_0(z) := \int_\Gamma \frac{1}{2\pi i}\, g(w, z)\, dw$

ist stetig

Offenbar: $h_0 = h$ auf U - Spur Γ

h_0 ist sogar holomorph auf U: betrachte dazu ein abgeschlossenes Dreieck $\Delta \subset U$, dessen Rand z.B. positiv orientiert ist $\Longrightarrow$

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} \left\{ \int_\Gamma g(w,z)\,dw \right\} dz \overset{g \text{ stetig auf } U\times U}{=} \text{(rechne mit Parametrisierungen und vertausche wie üblich)}$$

$$\int_\Gamma \left\{ \int_{\partial\Delta} g(w,z)\,dz \right\} dw$$

$z \mapsto g(w,z)$ ist holomorph auf $U-\{w\}$ und stetig in w, also holomorph auf U (Hebbarkeitssatz), nach Goursat (Satz 3.1) folgt

$$\int_{\partial\Delta} g(w,z)\,dz = 0,$$

also $\int_{\partial\Delta} h_0(z)\,dz = 0$. Satz 3.5 (Morera) ergibt Holomorphie von h_0 auf U.

2te Schritt: Fortsetzung von h_0 auf ganz $\mathbb{C}$

Sei $U_0 := \{z \in \mathbb{C} : \eta(\Gamma, z) = 0\}$. Da Γ 0-homolog in U ist, gilt:

$$\mathbb{C} - U \subset U_0,$$

d.h. $\boxed{\mathbb{C} = U_0 \cup U}$. Auf $U_0 \cap U$ ist

$$h_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

denn $h_0 = h$ auf U - Spur Γ ($U_0 \cap U \subset U$ - Spur Γ !)

und in $h(z)$ fällt der Anteil $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw$ heraus.

Die Funktion $U_0 \ni z \to \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ ist holomorph auf U_0 (Differentation unter $\int$), also

$$H: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad H(z) = \begin{cases} h_0(z), & z \in U \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw, & z \in U_0 \end{cases}$$

holomorph auf $\mathbb{C}$. Außerdem: $H = h$ auf U - Spur Γ.

(Bem: Sind V, W offen $\subset \mathbb{C}$, $\phi: V \to \mathbb{C}$, $\psi: W \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\phi = \psi$ auf $V \cap W$, so ist

$$V \cup W \ni z \to \begin{cases} \phi(z), & z \in V \\ \psi(z), & z \in W \end{cases}$$

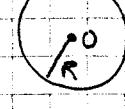
trivialerweise holom. auf $V \cup W$.)

Wir zeigen: H ist beschränkt.

Sei Spur $\Gamma \subset \overline{D}_R(0)$. Dann ist

$$\mathbb{C} - \overline{D}_R(0) \subset U_0,$$

denn für $|z| > R$ ist



$w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph auf der konvexen Menge $D_R(0)$, hat also eine Stammfunktion, so daß $\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = 0$

für den Zyklus Γ, d.h. $\gamma(\Gamma, z) = 0 \implies z \in U_0$.

Für $|z| \geq 2R$ folgt deshalb

$$|H(z)| \overset{\text{Def. v. } H}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right| \leq$$

$z \in U_0$

$$\frac{1}{2\pi} \max_{\text{Spur}\,\Gamma} |f| \cdot \sum_{k=1}^{n} |m_k| \cdot L(\gamma_k) \cdot \frac{1}{R} .$$

Also ist H beschränkt $\overset{\text{Liouville}}{\implies}$ $H \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Mit $R \to \infty$ sieht man $H \equiv 0$. Es folgt auch $h_0 = 0$ auf $U \implies$

$h = 0$ auf $U - \text{Spur}\,\Gamma \implies$ Beh. (2). /

zu (1) Sei $a \in U - \text{Spur}\,\Gamma$ und $F(z) := f(z) \cdot (z-a)$. Dann ist

F holomorph in U mit $F(a) = 0 \overset{(2)}{\implies}$

$$0 = \gamma(\Gamma, a) \cdot F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-a}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)\, dw$$

□

Bem: a) Anwenden von (1) auf $\Gamma - \Gamma'$ liefert:

> Γ, Γ' Zykln in U, homolog in $U \implies$
>
> $\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\Gamma'} f(z)\, dz \quad \forall f: U \to \mathbb{C}$ holomorph

anders formuliert:

Γ_1, Γ_2 Zyklen in U, $\eta(\Gamma_1, \cdot) = \eta(\Gamma_2, \cdot)$ auf $\mathbb{C} - U$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \quad \forall f: U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}$$

(Spezialfall: γ_1, γ_2 geschlossen $\subset U$ mit $\eta(\gamma_1, \cdot) = \eta(\gamma_2, \cdot)$ auf $\mathbb{C} - U$)

b) (1) sagt aus:

$$\Gamma \text{ o homolog in } U \Rightarrow \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \forall f: U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}$$

Es gilt auch $\Leftarrow$ (=):

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \text{ holomorph} \Rightarrow$$

der Zyklus Γ ist o homolog in U

Ist nämlich Γ nicht o homolog in U, so findet man $a \in U - \mathbb{C}$ mit

$$0 \neq \eta(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-a} \cdot \quad f(w) = \frac{1}{w-a} \text{ ist holomorph in } U.$$



Problem (1) ist somit vollständig gelöst bzw. darauf reduziert, für Zyklen Γ in U die Umlaufzahlen $\eta(\Gamma, \cdot)$ auf $\mathbb{C} - U$ zu berechnen.

Damit wollen wir uns jetzt befassen.

Berechnung der Umlaufzahl: Wir beginnen mit einer

nicht in G enthalten!

DEF 7.5: Sei $\gamma: I \to \mathbb{C}$ ein Weg, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

γ läuft in G von Rand zu Rand, falls gilt

i) $\exists\, t_1 < t_2$ aus I, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, mit $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial G$

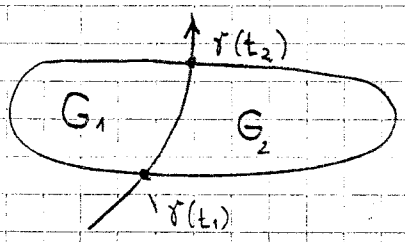
ii) für $t \in (t_1, t_2)$ ist $\gamma(t) \in G$

iii) für $t \notin [t_1, t_2]$ gilt $\gamma(t) \notin \overline{G}$

iv) G - Spur γ hat genau 2 Komponenten G_1 und G_2 und

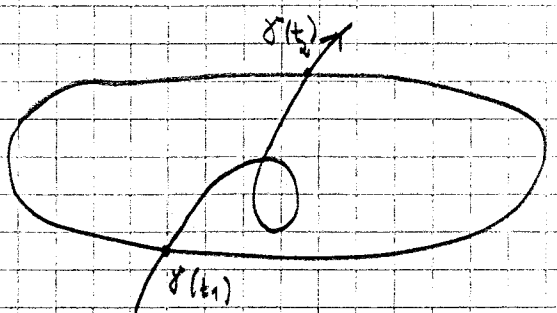
$$\text{Spur}\,\gamma \cap G \subset \partial G_1 \cap \partial G_2.$$

Bem: 1) γ mündet also zur Zeit t_1 in ∂G ein, verläuft dann bis t_2 in G, um zur Zeit t_2 $\overline{G}$ zu verlassen.

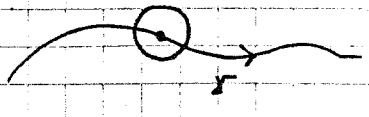


2) So darf sich γ nicht verhalten:

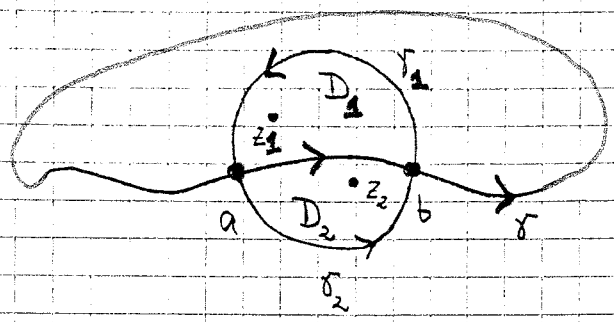
G - Spur γ hat 3 Komponenten.



3) Man zeige: Ist $\gamma: I \to \mathbb{C}$ glatt und injektiv oder einfach geschlossen, so gilt: $\exists\, z_0 \in \text{Spur}\,\gamma$ $\exists\, r_0 > 0$ γ läuft in $D_\rho(z_0)$ von Rand zu Rand für alle $\rho \leq r_0$



Sei nun $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, der in einer Kreisscheibe D von Rand zu Rand läuft.



Seien $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ wie in Def. 7.5, $\gamma(t_1) = a$, $\gamma(t_2) = b$ $a, b \in \partial D$. Man setzt:

braucht man nur für den Beweis

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \gamma|_{[t_1, t_2]}, \quad \gamma_1 = \text{Kreisbogen } \underline{\text{von}}\ b\ \underline{\text{nach}}\ a \text{ (Orientierung!)} \\ \gamma_2 = \text{der komplementäre Kreisbogen } \underline{\text{von}}\ a\ \underline{\text{nach}}\ b \end{array} \right.$$

Die Komponenten D_1, D_2 von $D - \operatorname{Spur}\gamma$ seien wie im Bild und $z_k \in D_k$, $k = 1, 2$. Dann gilt:

Lemma: $$\boxed{\mathcal{Z}(\gamma, z_1) = \mathcal{Z}(\gamma, z_2) + 1}$$

Beweis: Schreibe $\gamma = \alpha\, \gamma_0\, \beta$ (Hintereinanderausführung), wobei

$\alpha = \gamma|_{I \cap (-\infty, t_1]}$, $\beta = \gamma|_{I \cap [t_2, \infty)}$ die Stücke von γ bezeichnen, die außerhalb von D verlaufen. [Für beliebige Ketten Γ (nicht notwendig Zyklen) sei Notation: $\mathcal{Z}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} \frac{dw}{w - z}$,

$z \notin \operatorname{Spur}\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{Spur}\Gamma_k, \quad \Gamma = \sum_{k=1}^{n} m_k \Gamma_k \,.\Big]$

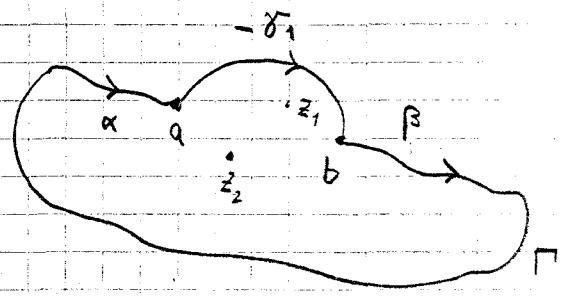
Die Additivität von $\int$ bzgl. Kurven benutzend folgt

$$\eta(\gamma, z_1) - \eta(\gamma, z_2) = \eta(\gamma_0, z_1) - \eta(\gamma_0, z_2)$$

$$(1) \qquad + \eta(\alpha+\beta, z_1) - \eta(\alpha+\beta, z_2)$$

↑ Kette!

Wir betrachten die Kette $\Gamma := \alpha - \gamma_1 + \beta$



Es gilt

$$z_1, z_2 \in D \subset \text{Zusammenhangskomponente von } \mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma$$

Da γ geschlossen ist, ist Γ sogar ein Zyklus und daher $\eta(\Gamma, \cdot)$ tatsächlich eine Windungszahl und somit konstant auf Komponenten $\Longrightarrow$

$$\eta(\Gamma, z_1) = \eta(\Gamma, z_2) \quad \Longrightarrow$$

$$\eta(\alpha+\beta, z_1) - \eta(\gamma_1, z_1) = \eta(\alpha+\beta, z_2) - \eta(\gamma_1, z_2).$$

Einsetzen in (1) liefert

$$\eta(\gamma, z_1) - \eta(\gamma, z_2) = \eta(\gamma_0, z_1) - \eta(\gamma_0, z_2) + \eta(\gamma_1, z_1) - \eta(\gamma_1, z_2)$$

z_2 liegt in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} - \operatorname{Spur}(\gamma_0 + \gamma_1)$,

$\gamma_0 + \gamma_1$ ist Zyklus $\Longrightarrow \eta(\gamma_0 + \gamma_1, z_2) = 0,$

da jetzt $\eta(\gamma_0 + \gamma_1, z_i)$ Windungszahl. (Satz 7.3)

Analog: $\eta(\gamma_2 - \gamma_0, z_1) = 0$.

Also: $\eta(\gamma, z_1) - \eta(\gamma, z_2) = \eta(\gamma_0, z_1) + \eta(\gamma_1, z_1) =$

$\eta(\gamma_0, z_1) + \eta(\gamma_1, z_1) + \underbrace{\eta(\gamma_2 - \gamma_0, z_1)}_{=0} =$

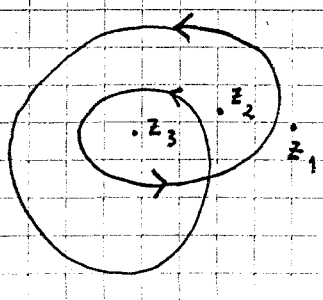
$\eta(\gamma_1 + \gamma_2, z_1) = \eta(\partial^+ D, z_1) = 1$.

□

Bem: Ist Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$, kann man gemäß Bem. ⑤ nach Def 7.2 Γ aufspalten in ein System von geschlossenen Kurven γ. Da die Windungszahl additiv ist, läßt sich $\eta(\Gamma, z)$ für $z \notin \operatorname{Spur}\Gamma$ ausrechnen durch Bestimmung von $\eta(\gamma, z)$ für geschlossene Kurven γ.

Dieses Problem kann man mit dem Lemma behandeln:

Ausgehend von $\eta(\gamma, z) = 0$ für z aus der unbeschränkten Komponente, kann man die Umlaufzahlen sukzessive berechnen.



z.B.: $\eta(\gamma, z_1) = 0 \Rightarrow$

$\eta(\gamma, z_2) = \eta(\gamma, z_1) + 1 = 1$

$\eta(\gamma, z_3) = \eta(\gamma, z_2) + 1 = 2$

Nun zu Problem ②:

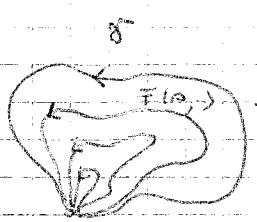
> Man charakterisiere die Gebiete $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit
>
> $$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$
>
> für alle Zyklen $\Gamma \subset \Omega$ und alle holomorphen $f: \Omega \to \mathbb{C}$.

Nach 7.4 + Bem. ist der Cauchy Integralsatz uneingeschränkt richtig, wenn (jeder) Zyklus 0 homolog in Ω ist. Wir wollen für diesen Sachverhalt (jetzt) eine mehr geometrische Beschreibung geben.

DEF 7.6: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ω heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma: I \to \Omega$ nullhomotop ist in Ω, d.h. es gibt eine stetige Abbildung

$$F: [0,1] \times I \to \Omega \qquad (\text{"Deformation"})$$

mit
$$\begin{cases} F(\rho, \cdot) & \text{ist geschlossene Kurve in } \Omega \quad \forall\, 0 \le \rho \le 1 \\ F(0, \cdot) & = \gamma \\ F(1, \cdot) & \equiv \text{const} \in \Omega \end{cases}$$



Bem: 1) F heißt eine Homotopie. F deformiert γ (also) über eine Schar geschlossener Kurven stetig in einen Punkt, ohne dabei Ω zu verlassen.

Nun zu Problem ②:

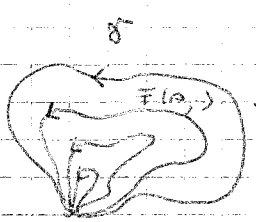
> Man charakterisiere die Gebiete $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit
>
> $$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$
>
> für alle Zyklen $\Gamma \subset \Omega$ und alle holomorphen $f: \Omega \to \mathbb{C}$.

Nach 7.4 + Bem. ist der Cauchy Integralsatz uneingeschränkt richtig, wenn (jeder) Zyklus 0 homolog in Ω ist. Wir wollen für diesen Sachverhalt (jetzt) eine mehr geometrische Beschreibung geben.

DEF 7.6: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ω heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma: I \to \Omega$ nullhomotop ist in Ω, d.h. es gibt eine stetige Abbildung

$$F: [0,1] \times I \to \Omega \qquad (\text{"Deformation"})$$

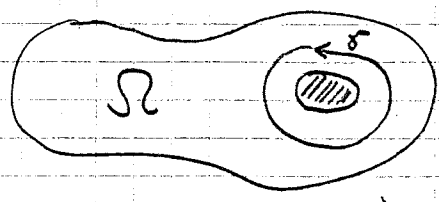
mit
$$\begin{cases} F(\rho, \cdot) & \text{ist geschlossene Kurve in } \Omega \quad \forall\, 0 \le \rho \le 1 \\ F(0, \cdot) & = \gamma \\ F(1, \cdot) & \equiv \text{const} \in \Omega \end{cases}$$



Bem: 1) F heißt eine Homotopie. F deformiert γ (also) über eine Schar geschlossener Kurven stetig in einen Punkt, ohne dabei Ω zu verlassen.

2) Die Def. läßt sich wörtlich auf Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, übertragen.

3) In der Ebene $\mathbb{C}$ sollte man sich einf. zshgnde Gebiete Ω als Mengen ohne Löcher vorstellen:



Hat Ω wie gezeichnet ein Loch (z.B. $\Omega = D_2(0) - D_1(0)$, $= \mathbb{C} - \{0\}$ o.ä.), so lassen sich unschwer geschlossene Kurven γ um das Loch finden, die man in Ω nicht auf einen Punkt zusammenziehen kann.

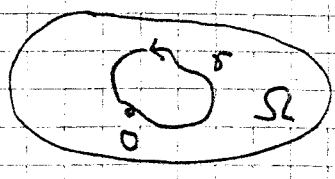
Im $\mathbb{R}^3$ lassen sich einfach zusammenhängende Gebiete nicht durch das Fehlen von Löchern beschreiben; So ist $\mathbb{R}^3$ - Kugel einfach zshgd, hat aber ein Loch. Geschlossene Wege in $\mathbb{R}^3$ - Kugel kann man anschaulich "um das Loch herum" auf einen Punkt zusammenziehen.

4) Man zeige: → Übung

a) $\mathbb{C} - \{0\}$ nicht einfach zshgd.

b) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ konvexes Gebiet, so ist Ω einfach zshgd.

$F(\rho, t) := \rho\,\gamma(t)$,
falls $0 \in \Omega$



Top Aussage!

SATZ 7.5 : Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

(i) Ω ist einfach zusammenhängend $\Longleftrightarrow$

(ii) Jeder Zyklus Γ in Ω ist in Ω 0-homolog.

KOROLLAR: Ist Ω einfach zusammenhängend, so gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{für jeden Zyklus } \Gamma \text{ in } \Omega$$

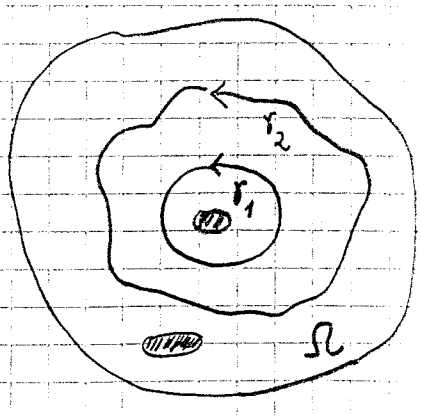
und all holomorphen $f: \Omega \to \mathbb{C}$.

(Speziell: Ω einf. zshgd, f holomorph $\Rightarrow \exists$ Stammfkt.)

Wir wollen diesen Satz nicht streng beweisen, sondern nur einige Ideen und Konzepte darlegen.

1. Seien γ_1, γ_2 zwei geschlossene Kurven im Gebiet Ω, die in Ω zueinander als geschlossene Kurven homotop sind, d.h. es gibt $F: [0,1] \times I \xrightarrow[C^0]{} \Omega$ mit

$$\begin{cases} F(0,\cdot) = \gamma_1\,, \quad F(1,\cdot) = \gamma_2\,, \\ F(r,\cdot) \text{ ist geschlossener Weg} \end{cases}$$



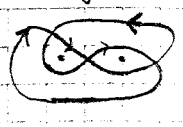
= Löcher in Ω

Dann gilt:

$$\zeta(\gamma_1,\cdot) = \zeta(\gamma_2,\cdot) \quad \text{auf } \mathbb{C} - \Omega\,.$$

Speziell: $\boxed{\gamma \text{ 0-homotop} \Longrightarrow \gamma \text{ 0-homolog (in } \Omega)}$

Umkehrung falsch!



Bew: Rudin, Thm. 10.40, p. 240
↳ Real and Complex Analysis

{ zum Gegenbspl: Conway, 9c
G = $\mathbb{C}$ - die beiden Punkte,
$\eta(\Gamma, \cdot) = 0$ dort, aber Γ nicht 0-homotop

Folgerung: Ω einfach zshgd $\Longrightarrow \eta(\gamma, \cdot) = 0$ auf $\mathbb{C} - \Omega$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma \subset \Omega$

$\underset{4.4}{\Longrightarrow}$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg

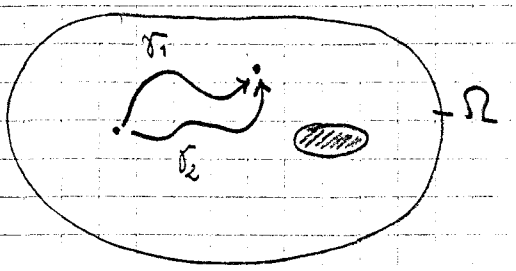
und alle holomorphen $f : \Omega \to \mathbb{C}$

2. Sei Ω einfach zshgd., Γ ein Zyklus in Ω. Nach den Bem. im Anschluß an die Def. von Zyklus kann man sich Γ vorstellen als ein System von geschlossenen Kurven in Ω mit Gewichten. Für jede Kurve ist nach 1. $\eta(\gamma, z) = 0$ auf $\mathbb{C} - \Omega$ und da $\eta(\cdot, z)$ additiv ist, folgt $\eta(\Gamma, z) = 0$, also Γ 0-homolog. Damit ist (i) $\Rightarrow$ (ii) in 7.5 begründet.

3. Die Umkehrung (ii) $\Rightarrow$ (i) in 7.5 ist tiefliegend und nicht von praktischer Bedeutung. Man kann sie so formulieren:

Ω Gebiet, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
für alle geschlossenen Wege $\gamma \subset \Omega$
und alle $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph
$\Longrightarrow$ Ω einfach zshgd.

4. Noch eine Variante des Cauchyschen Integralsatzes:



Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ zwei Wege im Gebiet Ω mit

$\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, wobei Ω ein beliebiges Gebiet sein soll, also nicht notwendig einf. zshgd.

γ_1, γ_2 heißen homotop in Ω bei festen Endpunkten $\iff$

$\exists$ $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ stetig mit

$H(0,\cdot) = \gamma_1$, $H(1,\cdot) = \gamma_2$,

$H(r,\cdot)$ ist ein Weg mit A.P. $\gamma_1(a)$ und E.P. $\gamma_1(b)$

SATZ: Seien γ_1, γ_2 homotop in Ω bei festen Endpunkten.

"Wegunabhängigkeit"

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

für alle $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph.

Beweis: $\gamma_1 \gamma_2^-$ ist 0homotop in Ω (trivial!) $\Rightarrow$ 1.

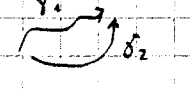
$\eta(\gamma_1\gamma_2^-, \cdot) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} - \Omega$ $\Rightarrow$

$\gamma_1 \gamma_2^-$ ist $\mathcal{O}$-homolog in Ω $\underset{7.4}{\Rightarrow}$ $\int_{\gamma_1\gamma_2^-} f(z)\,dz = 0$,

also $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

KOROLLAR 1: Ω einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ ($\forall f$ holomorph)

$\int_\gamma f(z)\,dz$ hängt nur von den Endpunkten des Weges ab.

( , $\gamma_1\gamma_2^-$ ist o-homotop da Ω einf. zshgd $\Rightarrow$ γ_1 homotop γ_2 bei festen Endpunkten)

KOROLLAR 2: $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Omega$ geschlossen, in Ω homotop als geschlossene Wege $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

für alle holomorphen $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(zu Kor 2: das Argument aus 1 zeigt

$\eta(\gamma_1, \cdot) = \eta(\gamma_2, \cdot)$ auf $\mathbb{C} - \Omega$ $\Rightarrow$

$\eta(\gamma_1\gamma_2^-, \cdot) = 0$ " $\Rightarrow$

$\gamma_1\gamma_2^-$ o-homolog, weiter wie oben)

□

§ 8 Nochmals komplexe Logarithmen

nicht notwendig auf zshgd

DEF 8.1: Sei $G \subset \mathbb{C}-\{0\}$ ein Gebiet. Man nennt eine stetige Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion oder einen Zweig des Logarithmus auf G, falls

$$\exp(f(z)) = z \quad \text{auf } G.$$

Bem: i) $f: G \to \mathbb{C}$ Logarithmus auf $G \Rightarrow f_k := f + 2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ auch Logarithmus auf G ($2\pi i$-Period. von exp)

ii) $f, g: G \to \mathbb{C}$ Logarithmen auf $G \Rightarrow$

$$\exp(f(z) - g(z)) \equiv 1 \quad \text{auf } G \Rightarrow$$

$$f(z) - g(z) = 2\pi i \, k(z) \quad \text{mit } k(z) \in \mathbb{Z} \text{ für } z \in G$$

f, g stetig $\Rightarrow$ $k(z) \equiv \text{const} \in \mathbb{Z}$, also

$$f = g + 2\pi i \, k_0, \quad k_0 \in \mathbb{Z}, \text{ auf } G.$$

Also: Zwei Logarithmen auf G unterschieden sich nur um Vielfache von $2\pi i$.

Logarithmen sind per Def. zunächst nur stetig, tatsächlich gilt mehr:

SATZ 8.1 : Sei $G \subset \mathbb{C}-\{0\}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ ein Logarithmus.

Dann ist f holomorph auf G mit $f'(z) = 1/z$.

Beweis: Aus $\overset{*}{\exp}(f(z)) = z$ folgt die Bijektivität von $f: G \to f(G)$.

Seien $z_0 \in G$, $z_n \in G$ mit $z_n \to z_0$. Mit $w_n := f(z_n)$,

$w_0 = f(z_0)$ gilt $w_n \to w_0$ (Stetigkeit von f) und

$$\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{w_n - w_0}{z_n - z_0} \overset{*}{=} \frac{w_n - w_0}{e^{w_n} - e^{w_0}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e^{w_0}},$$

da $\exp$ bei w_0 $\mathbb{C}$-diff'bar. Also

$$f'(z_0) = 1/e^{w_0} = 1/\exp(f(z_0)) = 1/z_0.$$

□

Auf welchen Gebieten $G \subset \mathbb{C}-\{0\}$ gibt es Logarithmen?

SATZ 8.2: Sei $G \subset \mathbb{C}-\{0\}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

i) Auf G gibt es einen Logarithmus.

ii) $\frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion auf G.

iii) für jeden Zyklus $\Gamma \subset G$ ist $\gamma(\Gamma, 0) = 0$.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Satz 8.1

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $g: G \to \mathbb{C}$ Stammfunktion zu $1/z$ auf G.

Dann ist

$$(\exp \circ g)'(z) = \exp(g(z)) \cdot \frac{1}{z} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(z \cdot \exp(-g(z))\right)' = 0 ,$$

d.h. $z \cdot e^{-g(z)} = c \in \mathbb{C}$. Offenbar ist $c \neq 0$,

so daß man $c_1 \in \mathbb{C}$ findet mit $e^{c_1} = c$. Also:

$$z = e^{c_1} e^{g(z)} = \exp(c_1 + g(z))$$

Die Funktion $G \ni z \mapsto c_1 + g(z)$ ist dann ein Logarithmus auf G.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sei g Stammfunktion zu $1/z$ auf G

$\Longrightarrow$ $0 = \int_\Gamma \frac{dz}{z}$ für jeden Zyklus $\Gamma \subset G$

Satz 7.1

(denn mit $\Gamma = \sum m_k \gamma_k$, $\gamma_k : [a,b] \to \mathbb{C}$, ist

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \left(g(\gamma_k(b)) - g(\gamma_k(a)) \right)$$

$= 0$ nach der def. Eigenschaft von Zyklen)

Nun ist aber $\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \, \mathcal{Z}(\Gamma, 0)$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Sei Γ Zyklus in G. Dann folgt $\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 0$,

Satz 7.1 in der anderen Richtung angewandt liefert die Existenz einer Stammfunktion zu $1/z$ auf G. $\square$

Wir bemerken, daß es insbesondere auf $\mathbb{C}-\{0\}$ weder eine Logarithmus-funktion noch eine Stammfunktion zu $1/z$ geben kann, denn

$$\gamma(\partial^+ D_1(0), 0) = 1.$$

Außerdem: | $G \subset \mathbb{C}-\{0\}$ einfach zusammenhängend $\Rightarrow$
| $\exists$ ein Logarithmus auf G

(nämlich)

Nach Satz 7.5 ist jeder Zyklus in G 0-homolog, d.h.

$$\gamma(\Gamma, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}-G,$$

so daß speziell $\gamma(\Gamma, 0) = 0$ für alle Zyklen in G. Nun benutze **8.2**. □

Falls $f: G \to \mathbb{C}-\{0\}$ holomorph ist und auf $f(G)$ ein Zweig des Logarithmus L existiert, so folgt mit

$$g(z) := L(f(z))$$

die Gleichung

$$* \qquad e^{g(z)} = f(z). \quad \forall z \in G$$

Problem: Wann gibt es zu gegebenem f eine Funktion g mit $*$?

SATZ 8.3: Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zshgd. und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstelle auf G. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g: G \to \mathbb{C}$ mit $\exp(g(z)) = f(z)$ für $z \in G$.

1ter Beweis: Ist f nicht Konstant, so ist nach Satz 5.3

$f(G)$ ein Gebiet, $0 \notin f(G)$. Offenbar:

G einf. zshgd $\Longrightarrow$ $f(G)$ einf. zshgd

Nach obiger Bem. gibt es einen Zweig L des Logarithmus auf $f(G)$, d.h.

$$\exp(L(w)) = w \quad \forall\ w \in f(G) \Longrightarrow$$

$$\exp(L(f(z))) = f(z) \quad \forall\ z \in G$$

Mit $g := L \circ f$ folgt die Beh.

□

Ein anderer Beweis geht so:

Beweis: Angenommen, es gibt eine Lösung $\Rightarrow$ (Differentation)

$$f'(z) = g'(z) \cdot \exp(g(z)) = g'(z)\, f(z),$$

so daß

$$g'(z) = f'(z)/f(z).$$

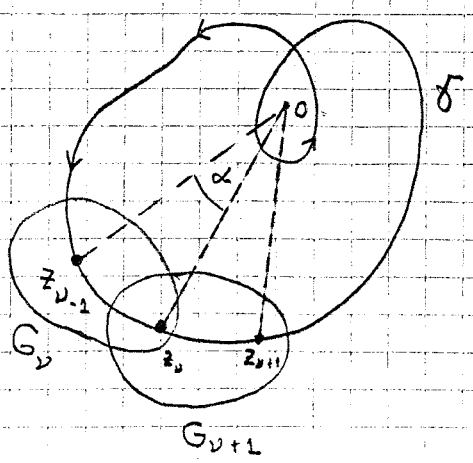
Betrachte also die holomorphe Funktion f'/f auf G. Nach dem Korollar zu 7.5 (G einf. zshgd!) gibt es eine Stammfunktion $h: G \to \mathbb{C}$ zu f'/f. Es folgt:

$$\left(f(z)\, e^{-h(z)}\right)' = f'(z)\, e^{-h(z)} - f(z)\, h'(z)\, e^{-h(z)} = 0,$$

so daß $f(z) = c\, e^{h(z)}$ auf G mit $c \in \mathbb{C} - \{0\}$. Schreibt man $c = e^{\tilde{c}}$, so folgt: $g(z) := \tilde{c} + h(z)$ ist Lösung des Problems. □

Wie hängen Komplexe Logarithmen mit der Umlaufzahl zusammen?

Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C} - \{0\}$ ein geschlossener Integrationsweg $\eta(\gamma, 0) = ?$



Zulge

$[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

wie folgt:

Spur $\gamma_\nu \subset G_\nu$, $\gamma_\nu := \gamma_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$

für ein Konvexes Gebiet $G_\nu \subset \mathbb{C} - \{0\}$

Zum Beispiel kann man für G_ν Kreisscheiben um $z_\nu = \gamma(t_\nu)$ nehmen, die 0 nicht treffen, wenn man die Unterteilung fein genug macht.

Nach Konstruktion ist

$$z_\nu \in G_\nu \cap G_{\nu+1}$$

Auf jedem G_ν existiert ein Logarithmus $f_\nu : G_\nu \to \mathbb{C}$

Es folgt:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} \frac{dz}{z}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(f_\nu(z_\nu) - f_\nu(z_{\nu-1}) \right)$$

f_ν hat die Form $f_\nu(z) = \ln|z| + i\left[\arg\frac{z}{|z|} + k_\nu \, 2\pi\right]$

so daß $$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\ln|z_\nu| - \ln|z_{\nu-1}| \right) + i \sum_{\nu=1}^{n} \left(\arg\frac{z_\nu}{|z_\nu|} - \arg\frac{z_{\nu-1}}{|z_{\nu-1}|} \right)$$

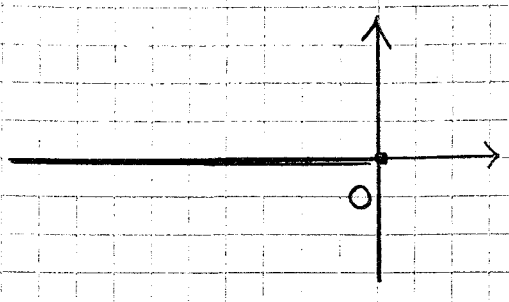
Die Differenz $\arg\frac{z_\nu}{|z_\nu|} - \arg\frac{z_{\nu-1}}{|z_{\nu-1}|}$ entspricht der Argumentänderung zwischen $t_{\nu-1}$ und t_ν, also dem überstrichenen Winkel. Da γ geschlossen ist, bleibt

$$\eta(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\arg\frac{z_\nu}{|z_\nu|} - \arg\frac{z_{\nu-1}}{|z_{\nu-1}|} \right) \in \mathbb{Z}$$

□

Zum Schluß noch eine

Potenzreihenentwicklung des Hauptzweiges des $\mathbb{C}$-Logarithmus



Auf $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ hat z die eindeutige Darstellung

$$z = r \cdot e^{i\alpha}$$

mit $r > 0$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$. Dann haben wir definiert

$$\log z = \ln r + i\alpha \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$$

Auf $(0, \infty)$ ist $\log = \ln$, speziell gilt

$$* \qquad \log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} z^k$$

zunächst für reelle z mit $|z| < 1$. Die rechte Seite konvergiert auf $D_1(0)$, $z \mapsto \log(1+z)$ ist auf $D_1(0)$ definiert und holomorph, d.h.

$$\boxed{\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} z^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C},\ |z| < 1}$$

§ 9 Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen

Problem: $f : D_1(0) - \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wie kann man das mögliche singuläre Verhalten von f bei 0 beschreiben?

Wir wissen schon: (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

> f beschränkt bei Annäherung an 0 $\Longrightarrow$
> f holomorph in 0 fortsetzbar.

$1/z$, $1/z^2$, $\sin 1/z$, $e^{1/z}$ sind nicht beschränkt, also singulär in 0, trotzdem kann man ihr singuläres Verhalten unterscheiden.

Notation: $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$ offener Kreisring

$$K(a,r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

Spezialfälle:

$K(a,0,\infty) = \mathbb{C} - \{a\}$

$K(a,0,R) = D_R(a) - \{a\}$ punktierte Kreisscheibe

SATZ 9.1: Sei f holomorph auf $K(a,r,R)$, $U_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$, $U_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$. Dann gibt es holomorphe Funktionen $f_1 : U_1 \to \mathbb{C}$, $f_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ mit

$$f = f_1 + f_2 \text{ auf } U_1 \cap U_2 = K(a,r,R).$$

Verlangt man $\lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0$, so ist die Zerlegung eindeutig.

Beweis: Sei $\rho \in (r, R)$ und

$$F_\rho(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

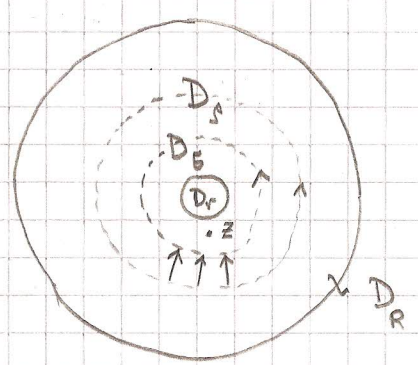
für $z \in D_\rho(a)$. Offenbar ist F_ρ holomorph auf $D_\rho(a)$. (Ableiten unter dem Integral). Sei $\sigma \in (r, R)$ ein anderer Radius, z.B. $\sigma < \rho$. Da $\partial^+ D_\rho(a)$ und $\partial^+ D_\sigma(a)$ in $K(a, r, R)$ homolog sind (sie haben dieselbe Windungszahl bzgl. $z \notin K(a, r, R)$), folgt

$$* \qquad \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw = \int_{\partial^+ D_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dz$$

für $z \in D_\sigma(a)$, genauer: fixiere $z \in D_\sigma(a) \Longrightarrow$

$w \mapsto \dfrac{f(w)}{w - z}$

ist holomorph in $K(a, \max\{|z-a|, r\}, R)$,



durch radiale Retraktion kann man $\partial D_\rho(a)$ auf $\partial D_\sigma(a)$ abbilden, d.h. die Wege $\partial^+ D_\rho(a)$, $\partial^+ D_\sigma(a)$ sind in $K(a, \max\{|z-a|, r\}, R)$ homotop als geschlossene Wege, Kor. 2 auf p. 159 ergibt $*$.

* besagt: $F_\rho(z) = F_\sigma(z)$

$\forall\ r < \sigma < \rho < R,\ |z-a| < \sigma$ } **

Man kann das auch so schreiben:

Sei $z \in U_2 = D_R(a)$. Man wählt $\rho \in (\max\{r, |z-a|\}, R)$

und definiert

$$f_2(z) := F_\rho(z)$$

Nach ** ist diese Setzung unabhängig von ρ. Fixiert man $z_1 \in U_2$

und wählt $\rho_1 \in (\max\{r, |z_1-a|\}, R)$, so gilt für z nahe z_1

auch $\rho_1 \in (\max\{r, |z-a|\}, R)$, d.h.

$$f_2(z) = F_{\rho_1}(z),$$

F_{ρ_1} ist holomorph auf $D_{\rho_1}(a)$, und $D_{\rho_1}(a)$ enthält eine Umgebung von z_1, so daß f_2 holomorph auf einer Umgebung von z_1 und damit holomorph auf U_2 ist.

Analog: Ist $z \in U_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z-a| > r\}$, so liefert

$$f_1(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\sigma(a)^+} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

$\sigma \in (r, \min\{R, |z-a|\})$ beliebig,

eine auf U_1 holomorphe Funktion.

Es gilt: $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$, denn für $|z|\to\infty$ ist in der Definition von $f_1(z)$ die feste Wahl $\sigma = \frac{1}{2}(r+R)$, und da f auf $\partial D_\sigma(a)$ beschränkt ist, folgt das Resultat aus Standardabschätzungen.

Wir berechnen $f_1(z)+f_2(z)$ für $z \in K(a,r,R)$: Mit

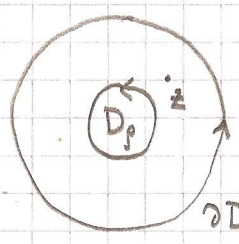
$$r < \sigma < |z-a| < \rho < R$$

ist

$$f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\partial^+ D_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

mit $\Gamma = \partial^+ D_\rho(a) - \partial^+ D_\sigma(a)$. Γ ist 0-homolog in $K(a,r,R)$, denn $\partial^+ D_\rho(a)$, $\partial^+ D_\sigma(a)$ haben dieselbe Windungszahl bzgl. Punkten in $\mathbb{C} - K(a,r,R)$, so daß $\eta(\Gamma,\cdot) = 0$ auf $\mathbb{C} - K(a,r,R)$. Satz 7.4 ii) (Cauchy-Formel) ergibt $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \eta(\Gamma,z)\,f(z)$.



Mit $\eta(\Gamma,z) =$

$\eta(\partial^+ D_\rho(a), z) - \eta(\partial^+ D_\sigma(a), z) = 1 - 0 = 1$

folgt $f = f_1 + f_2$ auf $K(a,r,R)$.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit:

Seien $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ andere Funktionen $U_i \to \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ auf $K(a, r, R)$ und $\lim_{|z| \to \infty} \tilde{f}_1(z) = 0$. Dann ist

$$f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \quad \text{auf } K(a, r, R)$$

und

$$h(z) := \begin{cases} f_1(z) - \tilde{f}_1(z) & \text{auf } U_1 \\ \tilde{f}_2(z) - f_2(z) & \text{auf } U_2 \end{cases}$$

somit eine wohldefinierte ganze Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die im Unendlichen verschwindet. Nach Liouville folgt direkt $h \equiv 0$.

□

<u>Notation:</u> $f : K(a, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph

$f = f_1 + f_2$ mit $f_1 : \mathbb{C} - \overline{D}_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorph,

$f_2 : D_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $\lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0$

f_1 = Hauptteil von f, f_2 = Nebenteil von f
(eindeutig festgelegt!)

Wir werden sehen: Der Hauptteil legt das Verhalten von f in der Nähe der isolierten Singularität a (d.h. $r = 0$) fest.

<u>Wir wollen explizite Formeln für Haupt- und Nebenteil finden:</u>

Die Bezeichnungen von oben seien gültig.

Da f_2 holomorph auf $D_R(a)$, gilt

$$(1) \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

mit a_ν aus $\mathbb{C}$. Für f_1 benutzen wir einen "Trick": Sei

$$\begin{cases} \varphi : D_{1/r}(0) - \{0\} \to \mathbb{C} - \overline{D}_r(a), \\ \varphi(w) = a + 1/w . \end{cases}$$

Dann ist $g := f_1 \circ \varphi$ holomorph auf $D_{1/r}(0) - \{0\}$ mit

$$\lim_{w \to 0} g(w) = \lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0,$$

also holomorph fortsetzbar auf $D_{1/r}(0)$. D.h.:

$$g(w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu w^\nu \quad \text{auf } D_{1/r}(0)$$

(Summation ab 1, da $g(0) = 0$), und die Reihe konvergiert glm. auf $\overline{D}_{1/\rho}(0)$, $\rho > r$. Rücktransformation liefert

$$(2) \quad f_1(z) = g\left(\frac{1}{z-a}\right) =: \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z-a)^{-\nu}, \quad z \in \mathbb{C} - \overline{D}_r(a),$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{C} - D_\rho(a)$, $\rho > r$.

Aus (1), (2) lassen sich Formeln für die Koeffizienten gewinnen, wenn man $f = f_1 + f_2$ auf $K(a, r, R)$ ausnutzt: für z aus $K(a, r, R)$ ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z-a)^{-\nu}$$

Sei $r < \rho < R$. Dann ist für $z \in \partial D_\rho(a)$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$(z-a)^{-n-1} f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^{\nu-n-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z-a)^{-\nu-n-1},$$

und die Reihen rechts sind auf $\partial D_\rho(a)$ glm. konvergent $\Longrightarrow$

$$\int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \underbrace{\int_{\partial^+ D_\rho(a)} (z-a)^{\nu-n-1}\, dz}_{= \begin{cases} 2\pi i, & \nu = n \\ 0, & \nu \neq n \end{cases}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \underbrace{\int_{\partial^+ D_\rho(a)} (z-a)^{-\nu-n-1}\, dz}_{= \begin{cases} 2\pi i, & \nu = -n \\ 0, & \nu \neq -n \end{cases}}$$

Also: $n \geq 0 \Longrightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$

$n < 0 \Longrightarrow b_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$

und man sieht, daß die Koeff. $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_{-n}\}_{n<0}$ durch dieselbe Formel gegeben werden.

Setzt man für $n < 0$

$$a_n := b_{-n},$$

so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$$

auf $K(a,r,R)$ mit $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$, $n \in \mathbb{Z}$, $r < \rho < R$.

Dies führt uns auf folgende

DEF 9.1: Seien $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{C}$.

Eine (formale) Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-a)^{-k}$

(dafür schreibe $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$)

heißt Laurent-Reihe.

Sie ist per Definition konvergent, wenn

(die sogenannte) Hauptteil: $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$ und

(-"-) Nebenteil: $\sum_{n=0}^{\infty} a_k (z-a)^n$

separat konvergieren.

Bem: Der Nebenteil ist eine "normale" Potenzreihe, hat also Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$. Für den Hauptteil transformiert man wie eben

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n, \qquad w = \frac{1}{z-a}$$

g konvergiert (als „normale" Potenzreihe) auf $D_{\tilde{r}}(0)$ mit $\tilde{r} \in [0,\infty]$ $\Rightarrow$ (Rück-Transformation)

Hauptteil ist konvergent auf $\mathbb{C} - \overline{D}_r(a)$, $r = 1/\tilde{r}$.

Für $r \geq R$ gibt es also keine offene Menge, auf der Haupt- und Nebenteil zugleich konvergieren. ← "Divergenz der L-Reihe" Nur im Fall $r < R$ ist die Laurent-Reihe konvergent auf $K(a, r, R)$.

Mit diesen Bezeichnungen lautet unser Ergebnis von vorhin

SATZ 9.2: Sein $0 \leq r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$ und f holomorph auf $K(a, r, R)$. Dann hat f dort eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < R.$$

□

Bem: 1) Sind $L_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k$, $L_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-a)^k$ zwei auf dem Ring $K(a, r, R)$, $0 \leq r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$ konvergente Laurent-Reihen mit $L_1(z) = L_2(z)$ auf $K(a, r, R)$, so folgt $a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

1. Begründung: $f(z) := L_1(z) = L_2(z)$ ist holomorph auf $K(a, r, R)$, nach Satz 9.1 läßt sich f eindeutig zerlegen als $f = f_1 + f_2$

mit $f_1 : \mathbb{C} - \overline{D}_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $f_2 : D_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph und für f_1 ist $\lim_{z \to \infty} f_1(z) = 0$. Daraus folgt

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^k \quad \text{und}$$

$$f_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{k=-1}^{-\infty} b_k (z-a)^k ,$$

also Gleichheit der Koeffizienten mit dem Identitätssatz für Potenzreihen, wobei man in $\sum_{k=-1}^{-\infty}$ die Transformation $w = \frac{1}{z-a}$ benutzt.

2. Begründung: Man multipliziert

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z-a)^k$$

mit $(z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, und integriert über $\partial D_\rho(a)$, $r < \rho < R$.

2) Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, so hat man

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw ,$$

also $$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} L(\partial D_\rho(a)) \, \rho^{-n-1} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \Longrightarrow$$

$$\boxed{|a_n| \leq \rho^{-n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| , \quad n \in \mathbb{Z} , \quad r < \rho < R.}$$

Cauchy-Abschätzung

Beispiele:

1) $f(z) = z^N \sin \frac{1}{z}$, $N \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$f(z) = z^N \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{-2k-1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{N-2k-1} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} .$$

Ist N ungerade, also $N = 2n+1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2n-2k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2n-2k}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} z^2 + \dots + z^{2n}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+3)!} z^{-2} + (-1)^{n+2} \frac{1}{(2n+5)!} z^{-4} + \dots$$

als Laurent-Entwicklung von f auf $\mathbb{C} - \{0\}$. Der Nebenteil ist ein Polynom vom Grad $2n$, der Hauptteil hat die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-2k} .$$

Für N gerade rechnet man analog.

2) Sei $f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-1}$. Diese Funktion ist holomorph auf $K(0,0,1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Mit $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ folgt sofort

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots \quad , |z|<1, \; z \neq 0 \, ,$$

d.h. hier bricht der Hauptteil ab, der Nebenteil hat unendlich viele Glieder.

Die Funktion f ist aber auch holomorph für $|z|>1$, also auf dem Ring $K(0,1,\infty)$. Jetzt schreibt man

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}$$

und wegen $|1/z|<1$ ist $\frac{1}{1-1/z} = \sum_{h=0}^{\infty} z^{-n}$, so daß

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{-2-n} = z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

auf $K(0,1,\infty)$.

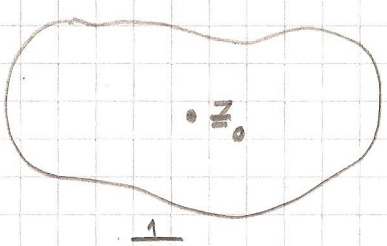
Hier ist also der Nebenteil $=0$, der Hauptteil beginnt mit z^{-2} und bricht nicht ab.

Merke: Es gibt nicht "die" Laurent-Reihe von f, sondern nur die Reihe von f bezogen auf den Ring $K(a,r,R)$. Je nach Wahl des Rings kann sich das Verhalten der Laurent-Entwicklung völlig verschieden darstellen.

Wir wenden uns einem wichtigen Spezialfall zu, wo die Kreisringe $K(a,r,R)$ punktierte Scheiben sind, also $r=0$, so daß

$$K(a,r,R) = D_R(a) - \{a\}.$$

DEF 9.2: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0, und $f: U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine <u>isolierte Singularität</u> von f. $U - \{z_0\}$ heißt punktierte Umgebung von z_0.



<u>Bem:</u> Ist U offen, $A \subset U$ eine endliche Menge und $f: U - A \to \mathbb{C}$ holomorph, so nennt man die Punkte von A auch isolierte Singularitäten von f. Es handelt sich also um mögliche Ausnahmepunkte, wo sich f irregulär verhält.

$e^{\frac{1}{z-z_0}}$

Z.B.: $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ isol. Sing. bei 0, 1

$f(z) = e^{1/z}$ " " 0

$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ " " 0 (hebbar!)

<u>Aber:</u> $f(z) = \cot(\pi/z) = \cos(\pi/z) / \sin(\pi/z)$ hat in 0 keine isolierte Singularität, denn für $z_n := 1/n$ ist $\sin(\pi/z_n) = 0$,

also $f(z_n)$ nicht definit und $z_n \to 0$, so daß f auf keiner punktierten Umgebung von 0 holomorph ist.

DEF 9.3: Klassifikation isolierter Singularitäten

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f: U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

i) z_0 heißt hebbare Singularität $\iff$ f ist nahe z_0 beschränkt

ii) Gilt $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, so heißt z_0 ein Pol von f.

iii) Gilt weder i) noch ii), so heißt z_0 wesentliche Singularität.

Bem: 1) z_0 hebbare Singularität $\iff$ (Riemann'scher Hebbarkeitssatz 3.7)

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert und $F(z) := \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ \lim_{z \to z_0} f(z) \end{cases}$ ist holomorphe Funktion auf U

2) Sei z_0 ein Pol von f. Dann gilt speziell

$$f(z) \neq 0 \quad \text{auf } V - \{z_0\}$$

für eine geeignete Umgebung V von z_0 in U, so daß

$$g := 1/f$$

auf $V - \{z_0\}$ holomorph ist mit $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$.

Also wird g durch den Wert 0 holomorph in z_0 fortgesetzt

Nach Satz 3.12 ist die Ordnung der Nullstelle z_0 endlich, es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(z \in V)$

$$g(z) = (z - z_0)^n \, h(z),$$

$h : V \to \mathbb{C}$ holomorph, $h(z_0) \neq 0$ (vgl. Bem. nach Def. 3.1)

Also:

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{h(z)} \quad \text{auf } V - \{z_0\},$$

$\frac{1}{h}$ holomorph auf V.

Folgerung: 1) | f hat in z_0 einen Pol $\iff$

$f(z) = (z - z_0)^{-n} \, \tilde{f}(z)$ mit eindeutig bestimmtem $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{f}$ holomorph bei z_0, $\tilde{f}(z_0) \neq 0$

n heißt die Ordnung der Polstelle.

2) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit diskreter Nullstellenmenge N in U. (ohne Häufungspunkte)

Dann ist $1/f : U - N \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen in N.

Es gilt:

| z_0 = Nullstelle der Ordnung n von f $\iff$

z_0 = Polstelle " " " $1/f$

SATZ 9.3: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf der punktierten Umgebung U von z_0. Dann gilt:

z_0 ist Pol von f der Ordnung n $\iff$

$\exists \; 0 < M_1 < M_2 < \infty$ mit

$$* \qquad M_1 \cdot |z - z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2 |z - z_0|^{-n}$$

für $z \neq z_0$ nahe z_0.

Beweis: $\Rightarrow$" Schreibe $f(z) = (z - z_0)^{-n} \, h(z)$, $h(z_0) \neq 0$, h holomorph. Auf einer Umgebung von z_0 gilt $0 < M_1 \leq |h(z)| \leq M_2 < \infty$ mit M_1, M_2 geeignet, also $*$.

$\Leftarrow$" Sei $*$ erfüllt. Dann ist

$$g : z \mapsto (z - z_0)^n f(z)$$

beschränkt, genauer $M_1 \leq |g(z)| \leq M_2$, $z \neq z_0$, kann also holomorph auf eine Umgebung V von z_0 fortgesetzt werden mit $g(z_0) \neq 0$. Also

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \, g(z),$$

so daß f nach der Folgerung 1) von oben einen Pol der Ordnung n im Punkt z_0 besitzt. $\square$

Polstellen lassen sich also genau klassifizieren. Dagegen zeigen Funktionen in der Nähe von wesentlichen Singularitäten ein merkwürdiges Verhalten.

SATZ 9.4 (Casorati - Weierstraß)

Sei z_0 isolierte Singularität von $f: U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

z_0 ist wesentliche Singularität $\iff$

zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $\{z_k\} \subset U - \{z_0\}$ mit

$z_k \to z_0$ und $f(z_k) \to w_0$

Bem: Ist z_0 wesentliche Singularität von f, so kommt $f(z)$ in jeder punktierten Umgebung von z_0 jedem Wert beliebig nahe (auch ∞, da sonst hebbar), also:

$$\mathbb{C} = \overline{f(D_r(z_0) - \{z_0\})} \qquad \forall\, r > 0 \ (\text{klein})$$

Beweis: „$\Leftarrow$" Offenbar kann z_0 dann weder hebbare Singularität noch Polstelle sein (im 2ten Fall gibt es keine Folge mit $f(z_k) \to 0$, $z_k \to z_0$)

„$\Rightarrow$" Sei z_0 wesentliche Singularität von f. Angenommen, es gibt $w_0 \in \mathbb{C}$, so daß w_0 durch keine Folge $f(z_k)$, $z_k \to z_0$, erreicht wird.

Dann findet man $\varepsilon > 0$, $r > 0$ mit

$$|f(z) - w_0| > \varepsilon$$

für alle $z \in D_r(z_0) - \{z_0\}$. Dann ist $\frac{1}{f - w_0}$ holomorph auf $D_r(z_0) - \{z_0\}$ und nach oben durch ε^{-1} beschränkt, also z_0 eine hebbare Singularität von $\frac{1}{f - w_0} =: g$.

Fall 1: $g(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$ hat in z_0 eine hebbare Singularität

Fall 2: $g(z_0) = 0 \Longrightarrow f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$ hat Pol in z_0

Beide Fälle führen auf einen Widerspruch! □

Ist z_0 isolierte Singularität von f, so kann man den Typ der singulären Stelle auch an der Laurent-Entwicklung von f auf $K(a, 0, \varepsilon)$ ablesen.

SATZ 9.5: Auf $K(a, 0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ sei f holomorph mit Laurent-Entwicklung $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$.
Dann gilt:

i) a hebbar $\iff a_n = 0 \quad \forall n < 0$

ii) a Pol der Ordnung $n \in \mathbb{N} \iff a_{-n} \neq 0,\ a_k = 0 \quad \forall k < -n$

iii) a wesentlich $\iff a_n \neq 0$ für ∞ viele $n < 0$

Beweis: i) a hebbar $\Leftrightarrow$ f hat Taylorreihe auf $D_\varepsilon(a)$

Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung $\Longrightarrow$ Hauptteil $\equiv 0$

ii) $\Leftarrow$ klar

$\Longrightarrow$ Schreibe $f(z) = (z-a)^{-n} h(z)$ mit h holomorph auf $D_\varepsilon(a)$, $h(a) \neq 0$; Taylorreihe von h einsetzen $\Longrightarrow$

$$f(z) = (z-a)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} c_n (z-a)^k \quad , c_0 \neq 0$$

Nun benutze wieder die Eindutigkeit der Laurent-Entwicklung.

iii) folgt aus i), ii). $\square$

Beispiel: $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots$ hat wesentliche Sing. bei 0

DEF 9.4 : meromorphe Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ diskret, also ohne Häufungspunkt in U.

f heißt meromorph auf U $\Longleftrightarrow$

i) f holomorph auf $U - P$

ii) die Punkte aus P sind Polstellen von f

Bspl: 1) P/Q mit Polynomen P und Q

2) $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $g \not\equiv 0$

Dann liegen die Nullstellen von g diskret und sind Pole von $1/g$

$\Longrightarrow$ f/g meromorph

(Bem: natürlich induziert nicht jede Nullstelle von g zwangsläufig einen Pol von f/g, z.B. $g(z) = z$, $f(z) = z^2$ $\Longrightarrow$ f/g hat hebbare Sing. in 0

allgemein: Polstellen von f/g $\subset$ Nullstellen von g)

Jede meromorphe Funktion hat lokal eine Darstellung als Quotient zweier holomorpher Funktionen

SATZ 9.6: Sei f meromorph auf U. Zu jedem $a \in U$ gibt es eine Umgebung V von a und holomorphe Funktionen $g, h: V \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = g(z)/h(z)$ auf V. *

ad *: natürlich nimmt man hier nur die z, wo $f(z)$ definiert ist, also keine Polstelle hat

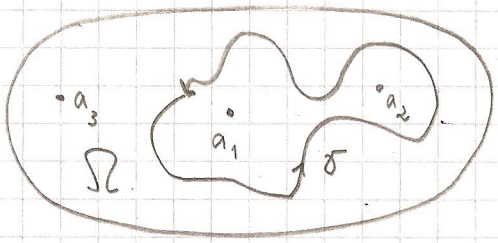
Beweis: Sei P_f die diskrete Polstellenmenge von f. Ist $a \notin P_f$, so setze $h \equiv 1$, $g \equiv f$, $V := U - P_f$. Für $a \in P_f$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ und g holomorph bei a mit $g(a) \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ lokal bei a, also $h(z) := (z-a)^n$.

□

§ 10 Der Residuensatz

ist eine Verallgemeinerung des Cauchy-Integralsatzes auf folgenden Fall:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, $a_1, \dots, a_n$ seien aus Ω und γ ein 0-homologer Zyklus in Ω.



Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

falls f holomorph auf Ω.

Problem: Was passiert, wenn f nur holomorph auf $\Omega - \{a_1, \dots, a_n\}$ ist?

Bspl: $f(z) = 1/z$, $\Omega = D_2(0)$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

DEF 10.1 Residuum

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten, wobei die Singularitätenmenge durchaus ∞ sein kann, sich aber im Inneren von U nicht häufen darf.

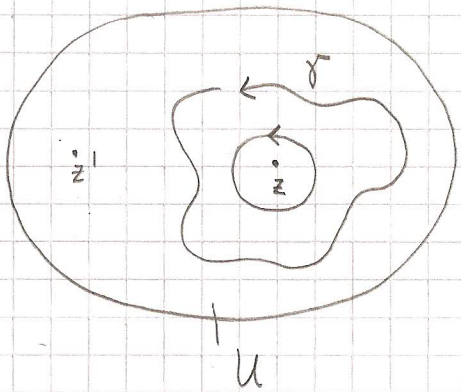
Ist $z \in U$ und $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\overline{D_\varepsilon}(z) - \{z\}$ keine Singularität enthält, so heißt

$$\operatorname{Res}_z f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\varepsilon(z)} f(w)\, dw$$

das Residuum von f in z.

Bem: ① Sei $\rho > 0$ so, daß $\overline{D_\rho(z)} - \{z\}$ keine Singularität von f enthält. Für $\varepsilon, \varepsilon' \in (0, \rho)$ sind $\partial^+ D_\varepsilon(z)$, $\partial^+_{\varepsilon'} D(z)$ homolog in $D_\rho(z) - \{z\}$, anders gesagt: Der Wert des Residuums hängt nicht vom speziellen ε ab.

② allgemeiner:



γ geschlossener Weg in U,

γ trifft keine Singularität,

$\eta(\gamma, \cdot) = 0$ auf $\mathbb{C} - U$

$\eta(\gamma, z) = 1$, $\eta(\gamma, z') = 0$ für Singularitäten $z' \neq z$

$\Longrightarrow$ γ und $\partial^+ D_\varepsilon(z)$ homolog in U - Singularitäten von f

$\Longrightarrow$ (Cauchy) $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)\, dw = \operatorname{Res}_z f$.

③ f holomorph nahe $z \Longrightarrow \operatorname{Res}_z f = 0$

④ $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-z)^n$ auf $D_\varepsilon(z) - \{z\} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{Res}_z f = a_{-1}}$

↑ Laurent-Entwicklung

Beispiele: Nach Bem ④ bekommt man das Residuum bei z_0 durch Bestimmung des Koeffizienten a_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f auf $D_\varepsilon(z_0) - \{z_0\}$.

1) $\operatorname{Res}_0 \frac{\sin z}{z^2} = ? \quad \frac{1}{z^2} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \text{Pos. Pot. von } z$

$\Longrightarrow \operatorname{Res}_0 \frac{\sin z}{z^2} = 1$

2) $\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z^2} = 0$

3) $\operatorname{Res}_1 f(z) = ? \qquad f(z) := z^2 (z+1)^{-1} (z-1)^{-2}$

$g(z) = \frac{z^2}{z+1}$ ist holomorph bei $z = 1 \longrightarrow$

$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-1)^k$ lokal bei 1 $\Longrightarrow$

$f(z) = b_0 (z-1)^{-2} + b_1 (z-1)^{-1} + b_2 + \dots (z-1)^k, \; k \geq 1 \Longrightarrow$

$\operatorname{Res}_1 f(z) = b_1$ mit

$b_1 = g'(1) = (z+1)^{-2} \{ 2z(z+1) - z^2 \} \Big|_{z=1} =$

$\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$, also $\operatorname{Res}_1 f(z) = \frac{3}{4}$.

4) $\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z(z-i)^2} = ? \qquad \frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 z^k$ bei 0 $\Longrightarrow$

$\operatorname{Res}_0 \dots = a_0 = -1$

□

SATZ 10.1: (Residuensatz) ← Verallgemeinerung von Cauchy

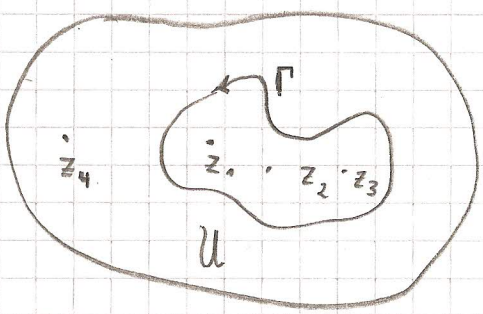
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten (← die sich nicht im Inneren häufen). Sei $\Gamma \subset U$ 0-homologer Zyklus in U, der keine Singularität trifft. Dann ist

$$\int_\Gamma f(w)\,dw = 2\pi i \sum_{z \in U - \mathrm{Spur}\,\Gamma} \eta(\Gamma, z)\, \mathrm{Res}_z f$$

Beweis: Zunächst macht die Summe auf der rechten Seite Sinn, denn

$$\mathrm{Res}_z f \cdot \eta(\Gamma, z) \neq 0$$

für höchstens endlich viele $z \in U - \mathrm{Spur}\,\Gamma$.



Angenommen $\mathrm{Res}_{z_k} f \cdot \eta(\Gamma, z_k) \neq 0$

für eine Folge verschiedener Punkte

$z_k \in U - \mathrm{Spur}\,\Gamma$. Die z_k gehören zur singulären Menge von f (← da ja $\mathrm{Res}_{z_k} f \neq 0$), können sich also im Inneren von U nicht häufen.

Fall 1: Eine Teilfolge wächst unbegrenzt, also o.E. $|z_k| \to \infty$.

Dann ist $\eta(\Gamma, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z_k}\,dz \longrightarrow 0$ $(k \to \infty)$

Nach 7.3 (Konstanz auf Komponenten) folgt

$\gamma(\Gamma, z_k) = 0 \quad , k \gg 1$

(direkt: $z_k \in$ unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C}$ - Spur Γ für $k \gg 1 \overset{7.3}{\Longrightarrow}$

$\gamma(\Gamma, z_k) = 0$)

Limespunkt muss im Rand liegen

Fall 2: Eine Teilfolge konvergiert, also o.E. $z_k \to z_0 \in \partial U$.

Da Γ 0-homolog in U ist (also $\gamma(\Gamma, \cdot) = 0$ auf $\mathbb{C} - U$),

folgt $\gamma(\Gamma, z_0) = 0$. Für $k \gg 1$ liegen z_k und z_0 in der

gleichen Komponente von U - Spur Γ, so daß $\gamma(\Gamma, z_k) = 0$, Widerspr!

Ergebnis: In $\sum_{z \in U - \text{Spur}\,\Gamma} \ldots$ liefern höchstens endlich viele (singuläre) Punkte einen Beitrag $\neq 0$. Dies sind anschaulich die singulären Punkte, die von Γ umfahren werden.

Seien jetzt $z_1, \ldots, z_m$ die singulären Punkte mit $\gamma(\Gamma, z_k) \neq 0$,

$M :=$ singuläre Menge von $f - \{z_1, \ldots, z_m\}$. h_k sei der

Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f auf $D_\varepsilon(z_k) - \{z_k\}$.

h_k ist holomorph auf $\mathbb{C} - \{z_k\} \Longrightarrow$

$$f - \sum_{k=1}^{m} h_k$$ holomorph auf $U - M$ (offene Menge)

Γ ist 0-homolog in $U - M$, denn für $z \in M$ ist ja $\gamma(\Gamma, z) = 0$.

Cauchy - Integralsatz $\Longrightarrow$

$$0 = \int_\Gamma \Big(f(z) - \sum_{k=1}^{m} h_k(z) \Big)\, dz =$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} \int_\Gamma h_k(z)\,dz =$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} \int_\Gamma \sum_{\ell=-1}^{-\infty} a_\ell^k (z-z_k)^\ell = \quad \text{(Vertauschung)}$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^k \int_\Gamma \frac{dz}{z-z_k} = \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{z_k} f \cdot 2\pi i\, \eta(\Gamma, z_k).$$

□

KOROLLAR: Sei Ω einfach zusammenhängend $\subset \mathbb{C}$, f sei holomorph auf Ω bis auf isolierte Singularitäten (" die sich in Ω nicht häufen.) Sei Γ ein Zyklus in Ω, der keine Singularität von f trifft. Dann ist

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{z \in \mathbb{C} - \operatorname{Spur}\Gamma} 2\pi i\, \eta(\Gamma, z)\, \operatorname{Res}_z f.$$

denn nach 7.5 ist jetzt jeder Zyklus $\subset \Omega$ auch 0-homolog in Ω.

In einigen Fällen kann man Residuen ohne großen Aufwand ausrechnen

SATZ 10.2: a) z_0 Pol 1ter Ordnung von f $\Longrightarrow \operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

b) g holomorph bei z_0, z_0 Pol 1te Ordnung von f $\Longrightarrow \operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f$

c) z_0 Pol n^{ter} Ordnung von f $\Longrightarrow$

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!}\, g^{(n-1)}(z_0) \qquad \left(g(z) := f(z)\,(z-z_0)^n \right)$$

Beweis: Trivial! (betrachte Entwicklungen von f) $\square$

Anwendungen des Residuensatzes

SATZ 10.3: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf U. Es seien

$a_1, a_2, \ldots$ die Nullstellen von f mit Ordnungen $n_1, n_2, \ldots$

$b_1, b_2, \ldots$ die Polstellen von f mit Ordnungen $m_1, m_2, \ldots$

und Γ ein o-homologer Zyklus in U, der die Null- und Polstellen von f nicht trifft. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_k \eta(\Gamma, a_k)\cdot n_k - \sum_\ell \eta(\Gamma, b_\ell)\, m_\ell .$$

Bem: 1) Wie vorhin sieht man, daß in beiden Summen nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind.

2) $\int_\Gamma \frac{f'}{f}\,dz$ heißt <u>das Null- und Polstellen zählende Integral.</u>

3) Statt 0 Stellen kann man auch w-Stellen, $w \in \mathbb{C}$, diskutieren: Dann steht links $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz$ und die a_k sind jetzt w-Stellen.

Beweis: Nach dem Residuensatz ist

$$* \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z \in U\text{-Spur}\,\Gamma} \eta(\Gamma, z)\,\operatorname{Res}_z \frac{f'}{f}$$

Sei a Nullstelle der Ordnung n, also $f(z) = (z-a)^n g(z)$ mit g holomorph bei a, $g(a) \neq 0$. Es folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (z-a)^{-n} g^{-1}(z)\left\{ n(z-a)^{n-1} g(z) + (z-a)^n g'(z)\right\}$$

$$= n\,\frac{1}{z-a} + g'(z)/g(z)$$

g'/g ist holomorph lokal bei a, so daß $\operatorname{Res}_a g'/g = 0$, also

$$\operatorname{Res}_a \frac{f'}{f} = n.$$

Sei b (Pol) der Ordnung $m > 0$, also $f(z) = (z-b)^{-m} h(z)$ mit h holomorph, $h(b) \neq 0$. Wie oben folgt $\operatorname{Res}_b \frac{f'}{f} = -m$.

f'/f ist nun außerhalb der 0 und Polstellen von f holomorph, Einsetzen in * ergibt die Behauptung. □

Als Folgerung aus 10.3 bekommen wir

SATZ 10.4: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ sei n fache Nullstelle von f, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Umgebungen $V(z_0) \subset G$ und $W(0) \subset f(G)$, so daß zu jedem $w \in W$ mit $w \neq 0$ genau n einfache w-Stellen in V existieren. Bspl. $f(z) = z^n$, $z_0 = 0$

Beweis: Wegen $n < \infty$ ist f nicht konstant, die Nullstellen von f und f' liegen also isoliert. Folglich existiert $\varepsilon > 0$ mit $\overline{D}_\varepsilon(z_0) \subset G$, so daß $\overline{D}_\varepsilon(z_0) - \{z_0\}$ keine Nullstelle von f und f' enthält. Sei $V := D_\varepsilon(z_0)$ und $\gamma := \partial^+ D_\varepsilon(z_0)$. γ ist 0-homolog in G. Für W wählen wir die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} - f(\mathrm{Spur}\,\gamma)$, die 0 enthält.

Es ist $$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum_k \eta(\gamma, a_k) \cdot n_k ,$$

($a_1, a_2 \ldots$ w-Stellen in G, $n_1, n_2 \ldots$ Vielfachheiten)

für $w \in W$, die rechte Seite zählt nur die w-Stellen in V, für Punkte außerhalb von $\overline{V}$ ist $\eta(\gamma, \cdot) = 0$ (und wegen $w \notin f(\mathrm{Spur}\,\gamma)$ liegen auf ∂V keine w-Stellen).

Sei $N(w) := \sum_k \eta(\gamma, a_k)\, n_k$ (= # w-Stellen in V mit Vielfachheiten)

Es gilt

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))-w}\,dt =$$

$$\int_{f(\gamma)} \frac{du}{u-w} \quad \Longrightarrow$$

$$N(w) = \mathcal{Z}(f\circ\gamma, w) .$$

Da $\mathcal{Z}(f\circ\gamma,\cdot)$ konstant ist auf jeder Komponente von $\mathbb{C} - \mathrm{Spur}(f\circ\gamma)$, folgt

$$N(w) \equiv \text{const} \quad \forall w \in W,$$

also $N(w) = N(0) = n$. Für eine w-Stelle $z \in V$ mit $w \neq 0$ ist $f'(z) \neq 0$ nach Wahl von V, also kann z nur einfach sein, und wir haben gezeigt: Zu $w \in W - \{0\}$ gibt es genau n verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in V$ mit $f(z_k) = w$.

□

<u>Notation:</u> Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion $f: U \to V$ heißt <u>biholomorph</u>, falls f bijektiv ist mit <u>holomorpher</u> Umkehrfunktion $f^{-1}: V \to U$.

(Holomorphie von f^{-1} wird später gezeigt bzw. "CR")

<u>KOROLLAR:</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$.

Dann sind äquivalent: i) $f'(z_0) \neq 0$

ii) es gibt offene Umgebungen $V = V(z_0) \subset U$, $W = W(f(z_0))$ von z_0 bzw. $f(z_0)$, so daß $f|_V : V \to W$ biholomorph ist.

Bem: 1) Für C^1-Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^2$ folgt aus $Df(z_0) \neq 0$ nach dem Umkehrsatz, daß f eine Umgebung V von z_0 bijektiv auf eine Umgebung W von $f(z_0)$ abbildet und daß die Umkehrfunktion von $f: V \to W$ ebenfalls C^1 ist mit $Df^{-1}(f(z)) = Df(z)^{-1}$. Anders gesagt: „$\Rightarrow$" hat ein reelles Analogon.

2) „$\Leftarrow$" dagegen nicht: $f(x) = x^3$ ist bijektiv, aber $f'(0) = 0$. Allerdings ist f^{-1} nicht diff'bar, aber das braucht man für ii) $\Rightarrow$ i) nicht! (s.u.)

Beweis des Korollars:

i) $\Rightarrow$ ii) $f'(z_0) \neq 0$ bedeutet $Df(z_0) \neq 0$ für die reelle Ableitung, also folgt ii) aus dem Umkehrsatz. Daß $f^{-1}: W \to V$ holomorph ist, folgt aus der Formel $Df^{-1}(f(z)) = Df(z)^{-1}$ für die Jacobi-Matrizen. Man liest nämlich direkt ab, daß f^{-1} den Cauchy-Riemann Gleichungen genügt.

ii) $\Rightarrow$ i) Wir benutzen nur, daß f die offene Umgebung V bijektiv auf die offene Umgebung W abbildet, nicht aber Differenzierbarkeit von f^{-1}.

Wäre nämlich $f'(z_0) = 0$, so hätte $g : V \to \mathbb{C}$, $g(w) = f(w) - f(z_0)$, in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2$. n ist endlich, sonst folgt $f \equiv \text{const}$ im Widerspruch zur Injektivität von $f|_V$. Zu $w \neq 0$ nahe 0 gibt es nach Satz 10.4 genau n Punkte $z_1, \dots, z_n \in V$ mit $g(z_k) = w \Longrightarrow f(z_k) = w + f(z_0)$ für $k = 1, \dots, n$, Wspr. zur Injektivität.

□

Wir sehen also:

① | G Gebiet ; $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv
$\Longrightarrow$ $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$

denn: $f(G)$ ist Gebiet nach Satz 5.3, also offen, so daß f die offene Menge G bijektiv auf die offene Menge $f(G)$ abbildet. Die Rechnung für ii) ⇒ i) liefert $f'(z) \neq 0$ überall.

② | G Gebiet, f holomorph und injektiv $\Longrightarrow$
f biholomorph,

denn nach ① und dem Umkehrsatz ist $f^{-1} : f(G) \to G$ differenzierbar.

SATZ 10.5: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g: U \to \mathbb{C}$ seien holomorph, Γ sei Randzyklus einer offenen Menge $V \subset\subset U$. Gilt dann

$$* \qquad |f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \operatorname{Spur} \Gamma,$$

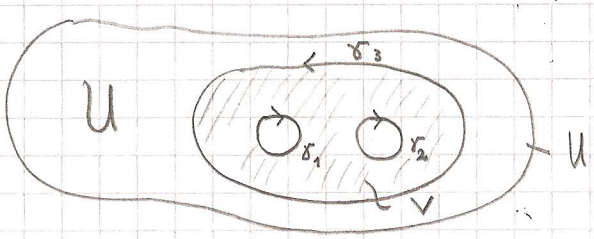
so haben f und g dieselbe Anzahl von Nullstellen in V (mit Vielfachheiten)

(Satz von Rouché)

Ein Zyklus $\Gamma \subset U$ heißt Randzyklus einer offenen Menge $V \subset\subset U$, falls Γ den Rand von V repräsentiert, d.h.

$$\eta(\Gamma, z) = 1 \quad \forall z \in V$$

$$\eta(\Gamma, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} - \overline{V}$$



Insbesondere ist ein Randzyklus 0-homolog in U.

Beweis: Aus * folgt $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ $\forall z \in \Gamma$

Betrachte die meromorphe Funktion $F := g/f$, die auf Γ weder 0 noch Polstellen hat. Es gilt:

** a = Nullstelle von $F \Rightarrow g(a) = 0$, b = Pol von $F \Rightarrow f(b) = 0$

Andrerseits ist nach 10.3

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \sum_k \eta(\Gamma, a_k)\, n_k - \sum_\ell \eta(\Gamma, b_\ell)\, m_\ell$$

wobei a_k = Nullstellen von F in V (sonst ist $\eta(\Gamma,\cdot)=0$)

mit Vielfachheit n_k

b_k = Pole ..... m_k .

Es gilt $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{F(\Gamma)} \frac{dw}{w} =$ (↑ Transf.)

$\eta(F(\Gamma), 0)$.

Gemäß $|F(z) - 1| < 1$ auf Γ ist $F(\Gamma) \subset D_1(1)$,

so daß $0 = \eta(F(\Gamma), 0)$.

Es folgt: $\sum_k \eta(\Gamma, a_k)\, n_k = \sum \eta(\Gamma, b_\ell)\, m_\ell \overset{\text{Vor. an } \eta(\Gamma,\cdot)}{\Longrightarrow}$

$\sum n_k = \sum m_\ell$, also die Beh. mit $**$.

(man begründe dies genau zur eigenen Übung !) □

Bspl : Sei $g(z) := 2z^4 - 5z + 2$, $z \in \mathbb{C}$

Frage: Wie groß ist die Anzahl der Nullstellen z von g mit $|z| \geq 1$?

Sei $f(z) = -5z + 2$. Dann ist für $|z| = 1$

$2 = 2|z|^4 = |f(z) - g(z)|$ und

$|f(z)| = |5z - 2| \geq 5 - 2 = 3$

Sei $V := D_1(0)$, $\Gamma := \partial^+ D_1(0)$. f verschwindet in $z_1 = 2/5 \in V$, folglich hat g genau eine Nullstelle in V. Da g insgesamt vier Nullstellen haben muß, ist die gesuchte Anzahl $= 3$ (mit Vielfachheiten gerechnet).

□

Eine Hauptanwendung des Residuenkalkuls liegt in der Auswertung uneigentlicher reeller Integrale, dazu jetzt

BEISPIELE:

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Mit $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ sieht man: f hat vier Pole an den Stellen $a_1, \ldots, a_4$, die sich als 4^{te} Einheitswurzeln von -1 ergeben, also

$$a_n = \exp\left(i\left[\frac{\pi}{4} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]\right), \quad n = 1, \ldots, 4.$$

Jeder Punkt a_n ist Pol 1^{ter} Ordnung, also

$$\operatorname{Res}_{a_1} f \overset{10.2}{=} \lim_{z \to a_1} (z - a_1)\, f(z) =$$

$$a_1^2 \cdot (a_1 - a_2)^{-1} (a_1 - a_3)^{-1} (a_1 - a_4)^{-1} \overset{\text{Rechnung}}{=} \frac{1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)$$

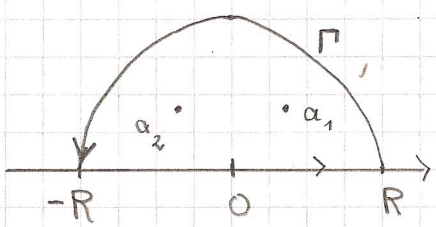
entsprechend:

$$\operatorname{Res}_{a_2} f = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{-3\pi i}{4}\right)$$

Auszurechnen ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$. Dazu

wählen wir $R \gg 1$ und ergänzen den Weg $[-R, R] \subset \mathbb{C}$

durch den Halbkreis-bogen Γ zum geschlossenen Weg γ.



γ umfährt dann a_1 und a_2, so daß

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}_{a_1} f + \operatorname{Res}_{a_2} f \right\}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Zu zeigen bleibt: $\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$

Γ wird parametrisiert durch $\Gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi] \Longrightarrow$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = iR \int_0^\pi R^2 e^{3it} \left(1+R^4 e^{4it}\right)^{-1} dt \quad \Rightarrow$$

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| = R^3 \left| \int_0^\pi \frac{e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}}\,dt \right| \leq$$

$$R^3 \int_0^\pi \frac{1}{\left|1+R^4 e^{it\cdot 4}\right|}\,dt$$

Die Punkte $1+R^4 e^{i4t}$ liegen auf der Kreislinie um 1 mit Radius R^4,

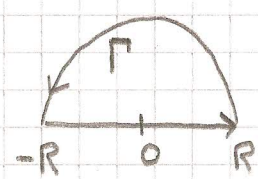
so daß $\left|1+R^4 e^{4it}\right| \geq R^4 - 1$. Es folgt

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \leq \pi \frac{R^3}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

also $$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Allgemein: $$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = ?$$

mit
- R = rational, Grad Nenner $\geq 2 +$ Grad Zähler ($\Rightarrow$ Konvergenz)
- R hat keine Pole auf der x-Achse



Dann ist $$\int_{[-R,R]+\Gamma} f(z)\,dz =$$

$2\pi i \left\{ \text{Residuensumme in } \mathrm{Im} > 0 \right\}$

und

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{\text{const} \cdot L(\Gamma)\ {}^1\!/_{R^2}}_{\uparrow \text{ Gradbedingung}} = \text{const} \cdot \pi \cdot {}^1\!/_R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 ,$$

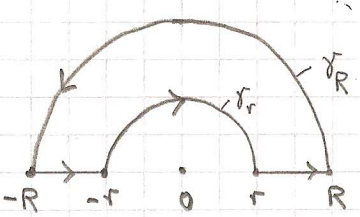
so daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx =$$

$$2\pi i \left\{ \text{Residuensumme in } \mathrm{Im} > 0 \right\}$$

② $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Mit $f(z) = \frac{1}{z} e^{iz}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, betrachten wir für $0 < r < R$ den folgenden Integrationsweg $\gamma = [-R, r] + \gamma_r + [r, R] + \gamma_R$,



wobei γ_r, γ_R entsprechend orientierte Halbkreise sind.

f ist holomorph in $\mathbb{C} - \{0\}$, γ ist 0-homolog in $\mathbb{C} - \{0\}$ (da $\eta(\gamma, 0) = 0$), also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 ,$$

es folgt:

$$0 = \int_r^R \frac{1}{x} e^{ix}\,dx + \int_{-R}^{-r} \frac{1}{x} e^{ix}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{iz}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} e^{iz}\,dz$$

$$= \int_r^R \frac{1}{x} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) dx + \int_{\gamma_R} \ldots + \int_{\gamma_r} \ldots$$

$$= 2i \int_r^R \frac{1}{x} \sin x\,dx + \int_{\gamma_R} \ldots + \int_{\gamma_r} \ldots ,$$

so daß wir das Verhalten der Integrale über die Halbkreise bei $r \downarrow 0$, $R \to \infty$ untersuchen müssen.

$\int_{\gamma_r} \ldots = ?$: $z \mapsto \frac{1}{z}\left(e^{iz} - 1\right)$ ist in 0 stetig fortsetzbar, so daß $\left| \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\left(e^{iz} - 1\right) dz \right| \underset{r \downarrow 0}{\to} 0$, m.a.W.

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} ,$$

sofern die Limiten existieren. Trivialerweise ist aber

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = -i\pi \qquad \text{(Orientierung von } \gamma_r \text{!)} ,$$

also $\lim_{r \downarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} e^{iz}\,dz = -i\pi$,

so daß die Behauptung folgt, wenn wir $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{iz}\,dz = 0$ ✳

zeigen können.

ad *:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{iz}\, dz \right| = \left| iR \int_0^{\pi} \frac{1}{R} e^{it} e^{-it} \exp\left(iRe^{it}\right) dt \right| =$$

$$\left| \int_0^{\pi} \exp\left(iR\, e^{it}\right)\, dt \right| ;$$

mit $\left|\exp\left(iR\, e^{it}\right)\right| = \left|\exp\left(-R\sin t + iR\cos t\right)\right| =$

$$\exp(-R\cdot\sin t)\ \underbrace{\left|\exp(iR\cos t)\right|}_{=1}$$

ist

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{iz}\, dz \right| \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{\delta} \ldots\, dt}_{\le 2\delta,\ \text{da Integrand} \le 1} + \int_{\pi-\delta}^{\pi} \ldots + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\cdot\sin t}\, dt$$

$$\le 2\cdot\delta + \pi \cdot e^{-R\sin\delta} ,$$

$\left\{ \begin{array}{l} e^{-R\cdot\sin t} \text{ wird auf} \\ [\delta, \pi-\delta] \text{ bei } \delta \text{ maximal} \end{array} \right.$

wobei $\delta > 0$ gegeben ist. Mit $R \to \infty$ sieht man

$$\limsup_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} e^{iz}\, dz \right| \le 2\delta ,$$

also gilt *.

(3) $a > 1$:

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}}$$

Hier ist die Reduktion auf ein komplexes Problem etwas aufwendiger:

Sei $z = e^{it} \Longrightarrow$

$$a + \cos t = a + \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \overset{|z|=1\ !}{=} a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 2az + 1}{2z}$$

Also

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} \overset{\gamma(t) = e^{it}}{=}$$

$$\int_0^{2\pi} \gamma(t) \left(\gamma(t)^2 + 2a\gamma(t) + 1\right)^{-1} dt \overset{\gamma(t) = -i\gamma'(t)}{=}$$

$$-i \int_{\gamma} \left(z^2 + 2az + 1\right)^{-1} dz .$$

Es gilt $z^2 + 2 \cdot a z + 1 = (z-\alpha)(z-\beta)$, mit den Nullstellen $\alpha = -a + \sqrt{a^2-1}$, $\beta = -a - \sqrt{a^2-1}$,

und aus $a > 1$ folgt $|\alpha| < 1$, $|\beta| > 1$, so daß

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = (-i) \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{\alpha} \left(z^2 + 2az + 1\right)^{-1}$$

$$= 2\pi \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

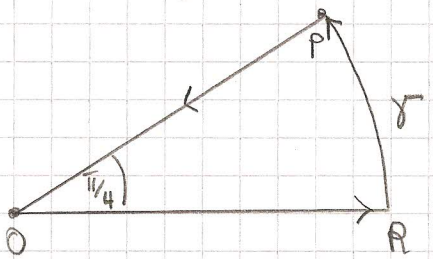
④ Die Fresnelschen Integrale

$$\boxed{\int_0^{\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}}$$

Naheliegenderweise faßt man die beiden reellen Integrale zu

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt + i\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \int_0^\infty e^{it^2}\,dt$$

zusammen, betrachtet also $f(z) = \exp(iz^2)$.



Als Integrationsweg wählt man für $R>0$

$$[0,R] + \gamma + \overrightarrow{PO},$$

wo $P = R\cdot e^{i\pi/4}$ und $\gamma(t) = R\cdot e^{it}$, $0\le t\le \pi/4$.

Nach Cauchy ist $0 = \int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_\gamma e^{iz^2}\,dz + \int_{\overrightarrow{PO}} e^{iz^2}\,dz$

mit

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi/4} Re^{it}\exp\left(iR^2e^{2it}\right)dt\right|$$

$$\le R\int_0^{\pi/4}\left|\exp\left[R^2(-\sin 2t + i\cos 2t)\right]\right|dt$$

$$= R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cdot\sin(2t)}\,dt$$

Für $t\in[0,\pi/4]$ ist

$$\sin(2t) = 0 + 2\cdot t\cdot\cos 0 + \frac{1}{2}\sin''\eta\cdot(2t)^2$$

$$= 2t - \frac{1}{2}\cos\eta\cdot(2t)^2,\quad \eta\in[0,\pi/2]$$

$$\ge 2t - 2t^2 \ge 2t - 2\frac{\pi}{4}t = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)t$$

also $\sin 2t \geq \delta \cdot t$ auf $[0, \pi/4] \Longrightarrow$

$$\left| \int_\gamma e^{iz^2} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cdot \delta \cdot t} dt =$$

$$\left(-\frac{1}{R^2 \delta} e^{-R^2 \delta t} \right) \Big|_0^{\pi/4} \cdot R \leq \frac{1}{R^2 \delta} R \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 .$$

Die Strecke von P nach O wird parametrisiert durch

$$[-R, 0] \ni t \mapsto -t\, e^{i\pi/4}$$

$$\Rightarrow \int_{\overrightarrow{PO}} e^{iz^2} dz = \int_{-R}^{0} -e^{i\pi/4} e^{i \cdot t^2 \cdot e^{i\pi/2}} dt =$$

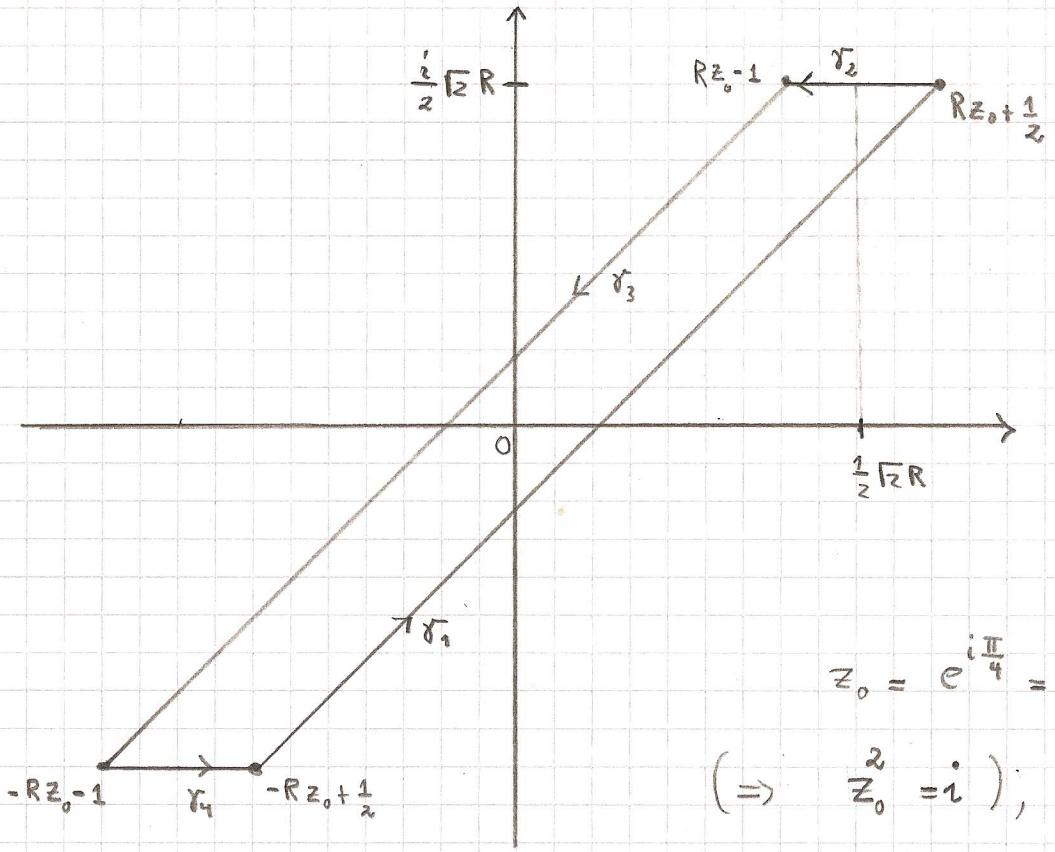
$$\underbrace{\int_{-R}^{0} e^{-t^2} dt}_{\to \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ (vgl. (5)!)}} \cdot \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \longrightarrow -(1+i)\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{\pi}$$

Also: $$\int_0^\infty e^{it^2} dt = (1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8}} .$$

(5) Wir haben in (4) benutzt, daß

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$$

ist. Wir kennen dieses Ergebnis aus Analysis III (Satz v. Fubini), wollen es aber nochmal komplex beweisen.



$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\left(\Rightarrow \quad z_0^2 = i\right), \quad R > 0$$

Sei $\gamma = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k$. Man setzt

$$f(z) = e^{i\pi z^2} / \sin(\pi z), \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

f hat in 0 einen Pol 1ter Ordnung, so daß

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 f = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin \pi z} e^{i\pi z^2} = 2i,$$

denn $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin \pi z} e^{i\pi z^2} = \frac{1}{\pi} \cdot 1 = 1/\pi.$

Andrerseits: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz =$

$$z_0 \int_{-R}^{R} \frac{\exp\left(i\pi\left[\frac{1}{2}+tz_0\right]^2\right)}{\sin\left(\pi\left[\frac{1}{2}+tz_0\right]\right)}\,dt - z_0 \int_{-R}^{R} \frac{\exp\left(i\pi\left[-\frac{1}{2}+tz_0\right]^2\right)}{\sin\left(\pi\left[-\frac{1}{2}+tz_0\right]^2\right)}\,dt =$$

$$= z_0 \int_{-R}^{R} \frac{\exp\left(i\pi\left[\frac{1}{4} + tz_0 + z_0 t^2\right]\right) + \exp\left(i\pi\left[\frac{1}{4} - tz_0 + t^2 z_0^2\right]\right)}{\cos(t\pi z_0)}\, dt$$

$$= z_0 \int_{-R}^{R} \exp\left(i\pi \cdot \left[\tfrac{1}{4} + t^2 z_0^2\right]\right) \cdot \underbrace{\left[\exp(i\pi t z_0) + \exp(-i\pi t z_0)\right]}_{=} \frac{1}{\cos(t\pi z_0)}\, dt$$

$$= 2 z_0\, e^{i\pi/4} \int_{-R}^{R} \exp\left(i\pi t^2 z_0^2\right) dt = 2i \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\, dt.$$

Nun zeige: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 0$, $k = 2, 4$, also:

$$2i = 2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = 1.$$

Mit der Variablensubstitution $t = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$ folgt die Beh.

□

Kurzfassung von

§ 11 + 12 :

vor Seite 212 (Beginn von

§ 11) die

neuen Seiten

a – å

einfügen

§11/12 Historische Beiträge

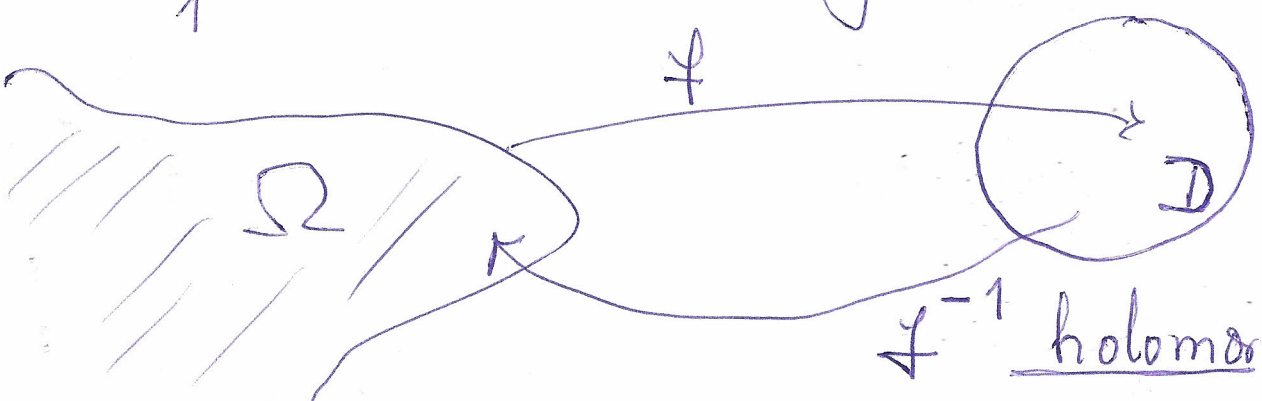
(von Riemann, Weierstraß und Mittag-Leffler)

vgl. §12 / p. 235 f

I. Der Riemannsche Abbildungssatz

(aus der Dissertation von Riemann, Göttingen 1851)

Fragestellung: Welche offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ können biholomorph auf $D_1(0) =: D$ abgebildet werden?



ein paar Hinweise:

- $\Omega = \mathbb{C}$ geht nicht (Liouville!)
- Ω muss einfach zshgd sein, da
  ▷ dies ist

Tatsächlich reicht das schon aus!

Theorem (von Riemann): (Thm. 12.1)

Jedes von $\mathbb{C}$ verschiedene einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ kann biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abgebildet werden.

M. a. W.: Für solche Ω entspricht die Theorie der holomorphen Fkten. $\Omega \to \mathbb{C}$ völlig der der holom. Fkten. $D \longrightarrow \mathbb{C}$, also o. E. $\Omega = D$.

Es gibt kein richtiges Analogon hierzu für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Wir beweisen nur ein kleines, aber entscheidendes Hilfsmittel: Satz 12.2 p. 236

Lemma von Schwarz:

Sei $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$f(D) \subset D$, $f(0) = 0$.

Dann gilt: a) $|f(z)| \leq |z|$ $\forall\, z \in D$

b) Ist für ein $z_0 \neq 0$

$$|f(z_0)| = |z_0|,$$

so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$,

mit $f(z) = \alpha z$ für alle $z \in D$.

Beweis: Schreibe ($a_0 = 0$ wegen $f(0) = 0$)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n.$$

Offenbar ist $f(z)/z$ holomorph (fortsetzbar) auf D mit

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{|z|}$$

wegen $|f(z)| < 1$. Es folgt:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r} \quad \text{für } |z| = r$$

mit $0 < r < 1$

Max-Prinzip für den Betrag (Satz 5.4)

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \quad \forall\ |z| \le r$$

für jedes $r \in (0,1)$;

mit $r \uparrow 1$ folgt a).

Gibt es $z_0 \in D - \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so hat der Betrag von

$$g: D \ni z \mapsto \frac{f(z)}{z} \in \mathbb{C}$$

wegen $|g(z)| \overset{a)}{\le} 1$ in z_0 ein

inneres Max., 5.4 i) liefert

$$g(z) \equiv \text{const}$$

mit $|\text{const}| = |g(z_0)| = 1$ □

II. Der Satz von Mittag-Leffler 1877

(Satz 11.1, p. 213)

Problemstellung: Konstruiere zu einer

„Folge von Polen b_k mit Ordnungen $n_k \in \mathbb{N}$"

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$,

die genau diese Vorgaben erfüllt

endlicher Fall: gegeben sind

1.) $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sowie

2.) Polynome P_k mit Ordnung $n_k \in \mathbb{N}$

und $P_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, m$

Setze

$$\text{(*)} \quad f(z) := \sum_{k=1}^{m} P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right),$$

$$z \in \mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_m\}$$

$\Longrightarrow$ $b_1, \dots, b_m$ sind genau die Pole von f mit Ordnungen $n_1, \dots, n_m$ und

Hauptteil der Laurent-Reihe von f auf $D_{r_k}(b_k) - \{b_k\}$, r_k klein, ist genau

$$P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$$

Wie macht man das für $m = \infty$?

Problem: mögliche Divergenz in (*)

Idee von M.-L.: ergänze Konvergenz-erzeugende holomorphe Summanden

Theorem (von M.-L.):

Sei (b_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $b_k \neq b_\ell$ für $k \neq \ell$ sowie

$$|b_k| \longrightarrow \infty, \quad k \to \infty.$$

Außerdem seien $P_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ Polynome mit grad ≥ 1 und $P_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit

- Polen genau in b_k
- Hauptteil der Laurent-Reihe auf $D_{r_k}(b_k) - \{b_k\}$ ist $P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$.

$\left\{\begin{array}{l} r_k \text{ so klein, dass} \\ b_\ell \notin D_{r_k}(b_k) \\ \text{für } \ell \neq k \end{array}\right.$

f hat die Form

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) - q_k(z) \right\} + g(z)$$

mit Konvergenzerzeugenden Polynomen $q_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, und einer ganzen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

§ 11 Einige klassische Sätze der Funktionentheorie

Wir betrachten das Problem, eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ zu finden, die an vorgegebenen Stellen $a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{C}$ Pole der Ordnung $n_1, n_2 \ldots$ besitzt. Genauer:

An jeder Stelle a_k ist ein

$$\text{Hauptteil}: \quad H_k(z) = \sum_{l=1}^{n_k} A_l^k \, (z-a_k)^{-l}$$

vorgegeben mit komplexen Zahlen A_l^k, d.h. $H_k(z) = P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ mit einem komplexen Polynom P_k vom Grad n_k. Nun suche man die meromorphe Funktion f, die genau in a_k Polstellen hat, und zwar so, daß der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f auf $D_r(a_k) - \{a_k\}$ (r genügend klein!) gerade H_k ist für jedes k. Hat man nur endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_N$, so kann man eine Lösung direkt hinschreiben:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right), \quad z \neq a_k.$$

Für eine unendliche Menge $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist nicht klar, ob mit der Wahl

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

überhaupt auf der rechten Seite Konvergenz vorliegt. Mittag-Leffler gelang 1877

die Beantwortung der Fragestellung nach folgender Idee: man addiere rechts geeignete (konvergenzerzeugende) Summanden, die selbst keine Polstellen besitzen. So konnte er beispielsweise meromorphe Funktionen systematisch konstruieren, die genau für $k \in \mathbb{N}$ Polstellen vorgegebener Ordnung haben.

SATZ 11.1: (Mittag-Leffler, 1877)

Sei $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $b_\ell \neq b_k$ für $\ell \neq k$ und ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, d.h. $|b_k| \longrightarrow \infty$ bei $k \to \infty$.

Außerdem seien P_k komplexe Polynome mit $P_k(0) = 0$.

Dann gibt es eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f, deren Pole genau die b_k sind mit Hauptteil $P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$ auf $D_{r_k}(b_k) - \{b_k\}$ für einen Radius $r_k << 1$. Jede meromorphe Funktion dieser Art läßt sich schreiben als

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) - p_k(z) \right\} + g(z)$$

mit geeigneten Polynomen p_k und einer ganzen Funktion $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Bem: ① r_k ist so zu wählen, daß $D_{r_k}(b_k) - \{b_k\}$ keinen anderen Punkt b_ℓ, $\ell \neq k$, enthält.

② Der Satz läßt sich ausdehnen auf den Fall, wo $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

ist und die Folge $\{b_k\}$ sich höchstens zum Rand ∂G hin häuft. Eine Version für diesen Fall findet man bei Conway, p. 205.

Beweis: Sei $H_k(z) := P_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right)$, $z \neq b_k$. H_k ist holomorph auf $\mathbb{C} - \{b_k\}$, hat also auf $D_{|b_k|}(0)$ eine Taylorreihenentwicklung, die lokal glm. konvergiert. Mithin gilt auf

$$\overline{D}_{\frac{1}{2}|b_k|}(0) \qquad |H_k(z) - p_k(z)| \leq 2^{-k},$$

wo p_k das Taylorpolynom genügend großer Ordnung zu H_k mit der Entwicklungsmitte 0 bezeichnet.

Sei $R > 0$ gegeben, für $k \geq k_0$ ist $\frac{1}{2}|b_k| \geq R \implies$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |H_k(z) - p_k(z)| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

$$\forall \; z \in \overline{D}_R(0),$$

d.h. $\sum_{k=k_0}^{\infty} \{H_k(z) - p_k(z)\}$ konvergiert gleichmäßig auf $\overline{D}_R(0)$,

stellt also auf $D_R(0)$ eine holomorphe Funktion f_1^R dar.

Der Rest $\underbrace{\sum_{k=1}^{k_0-1} H_k - p_k}_{f_2^R :=}$ ist meromorph auf $\mathbb{C} \implies$

$$f^R := f_1^R + f_2^R = \sum_{k=1}^{\infty} \{H_k - p_R\} \quad \text{ist meromorph auf } D_R .$$

Da $R>0$ beliebig ist, definiert

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \{H_k(z) - p_R(z)\} =: f(z)$$

eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, und nach Konstruktion leistet $f(z)$ das Gewünschte.

Ist $\tilde{f}$ eine zweite meromorphe Funktion, so daß die Hauptteile von $\tilde{f}$ in b_k gerade die Funktionen H_k sind, so folgt: $\tilde{f} - f$ ist ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ (betrachte dazu $\tilde{f} - f$ auf $D_\varepsilon(b_k) - \{b_k\}$ $\Rightarrow \tilde{f} - f$ holomorph fortsetzbar in b_k, da Hauptteile gleich; außerhalb der Punkte b_k ist $f - \tilde{f}$ trivialerweise holomorph), also

$$\tilde{f} = f + g, \quad g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ganz.}$$

□

<u>Anwendungen:</u> $f(z) := \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ ist auf $\mathbb{C}$ meromorph,

denn die Singularitäten von $z \mapsto 1/\sin^2(\pi z)$ sind Pole der Ordnung 2:

$z_0 = 0$: $\dfrac{\sin^2(\pi z)}{\pi^2 z^2} \longrightarrow 1$ bei $z \to 0$

$z_0 = n$: $\sin^2(\pi z) \Big/ \pi^2 (z-n)^2 =$

$$= \sin^2(\pi[z-n]) \Big/ \pi^2 (z-n)^2 \longrightarrow 1 \quad , \; z \to n .$$

Also hat f in $n \in \mathbb{Z}$ nur Polstellen 2^{ter} Ordnung, andere Singularitäten treten nicht auf, der Hauptteil von f lokal bei $n \in \mathbb{Z}$ ist also gegeben durch

$$H_n : \; z \mapsto \frac{1}{(z-n)^2} ,$$

die Reihe der Hauptteile lautet (zunächst nur formal)

$$(1) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} .$$

Hier erübrigt sich die Addition von konvergenzerzeugenden Summanden, da $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ für $z \notin \mathbb{Z}$ konvergiert: für $|z| < n_0 \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{|z-n|^2} \geq \frac{1}{n^2 - |z|^2} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \quad , \; n \geq 2n_0 ,$$

so daß

$$\sum_{n \geq 2n_0} \frac{1}{|z-n|^2} < \infty .$$

Nach Satz 11.1 folgt

$$(2) \qquad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z)$$

mit einer ganzen Funktion $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Es gilt: $g \equiv 0$.

Dazu beachtet man, daß f 1-periodisch ist und auch die Funktion $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$, denn das Ersetzen von z durch $z+1$ bedeutet ja nur eine Verschiebung des Summationsindex.

Sei $z = x+iy$ mit $0 \le x \le 1$. Es ist

$$|\sin^2(\pi z)| = \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x),$$

wie man aus

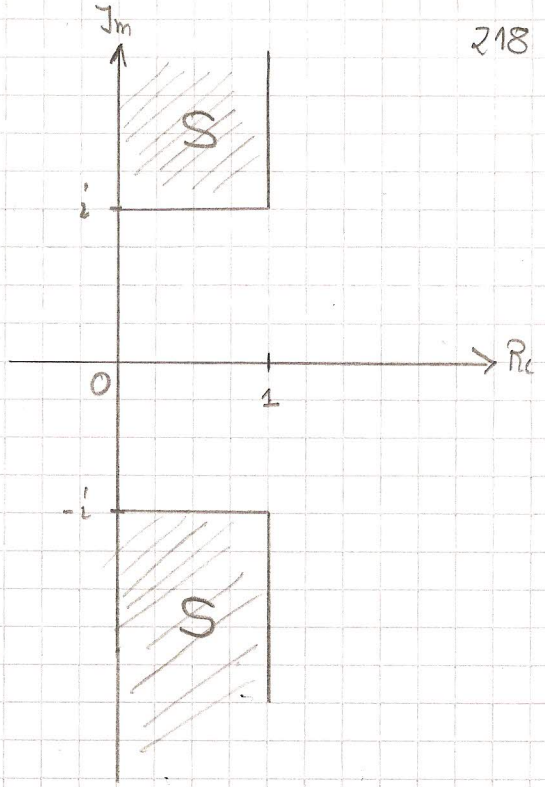
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\sin(u+iv)) = \sin u \cosh v, \\ \mathrm{Im}\,(\sin(u+iv)) = \cos u \sinh v \end{cases}$$

mit etwas Rechnung bekommt. Also gilt

$$\lim_{|y| \to \infty} |\sin^2(\pi z)| = \infty \quad \text{glm. für } 0 \le x \le 1 \implies$$

$$\lim_{|y| \to \infty} f(x+iy) = 0 \quad -\,\text{"}\,-\,.$$

Wir wollen zeigen, daß dies auch für $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ richtig ist und be-



trachten dazu den Bereich

$$S := \{x+iy : 0 \le x \le 1,\ |y| \ge 1\}$$

Für $z \in S$ ist $(\nu \neq 0, 1)$

$$\frac{1}{|z-\nu|^2} = \frac{1}{(x-\nu)^2 + y^2} \le$$

$\max\{\nu^{-2}, (\nu-1)^{-2}\}$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Also:

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{|\nu| > \nu_0} \frac{1}{(z-\nu)^2} \right| < \varepsilon/2, \quad z \in S.$$

Bei jetzt fixiertem ν_0 wählt man $R_0 > 1$ mit

$$\left| \sum_{\nu=-\nu_0}^{\nu_0} \frac{1}{(z-\nu)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $z \in S$, $|\mathrm{Im}\, z| \ge R$, $R > R_0$. Der Anfangsteil

$\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_0} \frac{1}{(z-\nu)^2}$ wird ja auf $\{z \in S : |y| \ge R\}$ gleichmäßig klein.

Zusammen folgt:

$$\lim_{|y| \to \infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0 \quad \text{glm. für } 0 \le x \le 1.$$

Speziell ist g beschränkt auf $[0,1] \times \mathbb{R}$, die 1- Periodizität von

g liefert Beschränktheit auf $\mathbb{C}$, nach Liouville ist g konstant und damit ersichtlich 0. Wir haben also

$$(3) \qquad \boxed{\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}}$$

Die linke Seite ist die Ableitung von $-\pi \cot(\pi z)$ und

$$\frac{1}{(z-n)^2} = -\left(\frac{1}{z-n}\right)'.$$

Aber $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ ist nicht konvergent! Man muß geeignete konvergenzerzeugende Summanden einführen. Für $n \neq 0$ betrachten wir deshalb

$$\frac{1}{z-n} - p_n(z),$$

wobei $p_n(z)$ ein geeignetes Taylorpolynom von $\frac{1}{z-n}$ bei 0 ist. Geeignet bedeutet: $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{z-n} - p_n(z)$ soll konvergieren. Es gilt

$$\frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n} \frac{1}{1-z/n} = -\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{\infty} (z/n)^{\ell}, \quad |z| < |n|,$$

also $\frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \dots$. Das Taylorpolynom o^{ter} Ordnung ist $\equiv -1/n$ und (klar!)

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{z}{n(z-n)}$$

Konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Also ist gliedweise Differentation erlaubt $\Longrightarrow$

$$\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{z}{n(z-n)} \right)' = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n\neq 0} \left\{ -\frac{1}{(z-n)^2} \right\} =$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \left(\pi \cot(\pi z) \right)' \Longrightarrow$$

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{z}{n(z-n)} + \text{const}, \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Ersetzt man z durch $-z$, beachtet, daß linke und rechte Seite ungerade sind, so folgt durch Addition const $= 0$, also die

Partialbruchzerlegung des Cotangens

$$\boxed{\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right), \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}}$$

(reelle Version → An. II, p. 107, Fourier Reihen)

Wir wollen jetzt ganze Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit gegebenen Nullstellen konstruieren. Dieses Problem wurde 1876 von Weierstraß gelöst. (Mittag-Leffler hat sich ausgehend von dieser Arbeit dann dem Polstellensatz 11.1 zugewandt).

Hat man nur endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, so setzt man offenbar

$$f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_N)$$

und bekommt das gewünschte Resultat. Für eine Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ohne Häufungspunkt ist die analoge Bildung

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (z - a_k),$$

wobei wir zunächst klären müssen, wie man $\prod_{k=1}^{\infty} \dots$ richtig interpretiert.

Unendliche Produkte:

DEF 11.1: Sei $\{z_n\}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \neq 0$ ab einer gewissen Stelle, d.h. es dürfen nur endlich viele Glieder $= 0$ sein, also $z_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Wir nennen dann $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent, falls

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=n^*}^{n} z_k$$

existiert und $\neq 0$ ist.

In diesem Fall setzt man

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k \in \mathbb{C}.$$

Bem: ① Unsere Def. von Konvergenz verlangt mehr, als nur zu sagen, daß

$$W := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} w_k \qquad *$$

existieren soll, denn diese Definition kann man ohne Bedingung an w_k formulieren. * als Definition zu nehmen, bringt nicht sehr viel: Zum einen ist der Limes 0, sobald ein Folgenglied 0 ist, Konvergenz liegt dann trivial vor. Aber auch für $w_k \neq 0$ ist * zu allgemein: mit $w_k = 1/k$ ist natürlich

$$\left| \prod_{k=1}^{n} w_k \right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

und auch hier hat man das Gefühl, daß ein Trivialfall vorliegt. Deshalb haben wir die komplizierte Definition von Konvergenz gewählt. Der Rest $\prod_{k=n^*}^{n} z_k$ muß bei $n \to \infty$ gegen einen Wert $\neq 0$ gehen.

② Es folgt: $\prod_{k=0}^{\infty} z_k = 0 \iff \exists n: z_n = 0$

und wir sehen, daß unsere Konvergenzdefinition sinnvoll ist:

Mit der schwächeren Definition * und $w_k = 1/k$ hätten wir als Produkt 0, ohne daß überhaupt ein Faktor verschwindet. Genau das soll vermieden werden.

③ $$\boxed{\prod_{k=1}^{\infty} z_k \text{ konvergent} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} z_k = 1}\ ,$$

denn $$z_k = \prod_{\ell=n^*}^{k} z_\ell \Big/ \prod_{\ell=n^*}^{k-1} z_\ell \longrightarrow_{k\to\infty} 1, \text{ da } \prod_{\ell=n^*}^{n} z_\ell \longrightarrow a \neq 0.$$

④ Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $z_k \equiv a$. Gemäß

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = a^n \longrightarrow 0$$

existiert das unendliche Produkt nicht.

Konvergenzkriterium:

Sei w_k Folge in $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, log der dort definierte Hauptzweig des Logarithmus. Dann gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} w_k \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \log w_k \text{ konvergent}$$

Beweis: $\Longleftarrow$" $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \log w_k\right) = \prod_{k=1}^{n} w_k$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \log w_k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k\right) \neq 0 \ (!)$$

$\Rightarrow$" Hier stellt sich die Frage, ob $P_n = \prod_{k=1}^{n} w_k$ möglicherweise in

$(-\infty, 0]$ liegt. Dieser Fall kann eintreten:

$$w_1 = w_2 = i, \quad w_k = 1, \ k \geq 3,$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} w_k = -1 \quad \forall\, n \geq 2.$$

Mithin ist es nicht möglich, log auf $\prod_{k=1}^{n} w_k$ anzuwenden und wie üblich zu rechnen. Man argumentiert so:

Sei $P = \lim_{n\to\infty} P_n \neq 0$, Man schreibt $P = |P|\, e^{i\Theta}$,

$\Theta \in (-\pi, \pi]$ und $P_n = |P_n|\, e^{i\Theta_n}$, wobei für $n >> 1$

$\Theta_n \in (\Theta - \pi, \Theta + \pi]$ erreicht werden kann. Außerdem ist wegen $P_n \to P$

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_n = \Theta, \quad \lim_{n\to\infty} \ln |P_n| = \ln |P|.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln |P_n| + i\Theta_n}_{=: \ell(P_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln |P| + i\Theta$$

Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log w_k \Rightarrow \exp(S_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\log w_k) = P_n$

D.h.: $S_n = \ell(P_n) + 2\pi i\, k_n$ mit $k_n \in \mathbb{Z}$.

Da $w_n \to 1$, gilt $S_n - S_{n-1} = \log w_n \longrightarrow 0$

Da auch $\ell(P_n) - \ell(P_{n-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, bekommt man aus

$$S_n - S_{n-1} = \ell(P_n) - \ell(P_{n-1}) + 2\pi i\,(k_n - k_{n-1}),$$

daß auch $k_n - k_{n-1} \to 0$. Gemäß $k_n \in \mathbb{Z}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$k_n \equiv k_{n_0} \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Das bedeutet:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ell(P_n) + 2\pi i\, k_{n_0} = \ln|P| + i\,\Theta + 2\pi i\, k_{n_0},$$

also Konvergenz von $\sum_{k=1}^{n} \log w_k$. □

<u>DEF 11.2:</u> Sei $\prod_{k=1}^{\infty} (1+w_k)$, $w_k \in \mathbb{C}$, ein konvergentes Produkt.

Dieses heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+w_k)$

absolut konvergiert, wobei die Restglieder evtl. erst ab $n \geq n_0$ definiert sind (so daß $1+w_k \notin (-\infty, 0]$).

Damit bekommen wir ein einfaches

KRITERIUM:

$\prod_{k=1}^{\infty} (1+w_k)$ absolut konvergent $\iff$

$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ $\quad$ "

Bem (zur absoluten Konvergenz):

In der Def. 11.2 von absoluter Konvergenz wird das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} (1+w_k)$ bereits als konvergent vorausgesetzt, so daß $1+w_k \to 1$.

Mithin macht $\log(1+w_k)$ für $k \gg 1$ Sinn und wir können die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} \log(1+w_k)$ diskutieren.

Beweis des Kriteriums:

Es gilt $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \log(1+z) = 1$, so daß

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{1}{z} \log(1+z) \right| \leq \frac{3}{2} \quad \forall\, |z| \ll 1, \text{ d.h.}$$

$$(*) \quad \frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z| \quad \text{-"-} .$$

$\Rightarrow$" $\sum |\log(1+w_k)|$ ist konvergent nach Def. $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$\sum |w_k| \leq 2 \sum |\log(1+w_k)| < \infty .$$

$\Leftarrow$ " Sei $\sum |w_k| < \infty \underset{*}{\Longrightarrow} \sum |\log(1+w_k)| < \infty$,

speziell existiert $\sum_{k=n_0}^{\infty} \log(1+w_k)$. Da auch $w_k \notin (-\infty, 0]$

für $k \geq n_0$, folgt nach dem 1^{ten} Kriterium die Konvergenz von

$\prod_{k=n_0}^{\infty} (1+w_k)$ (denn $\prod_{k=n_0}^{n} (1+w_k) = \prod_{k=n_0}^{n} \exp \log(1+w_k) =$

$\exp\left(\sum_{k=n_0}^{n} \log(1+w_k)\right) \longrightarrow \exp\left(\sum_{k=n_0}^{\infty} \log(1+w_k)\right) \neq 0$).

Dann ist $\prod_{k=1}^{\infty} (1+w_k)$ konvergent. □

Nun zum

SATZ 11.2 : (Produktsatz von Weierstraß für $\mathbb{C}$, 1876)

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in $\mathbb{C} - \{0\}$ mit $|a_n| \to \infty$.

Außerdem sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann findet man eine ganze Funktion

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wie folgt:

a) 0 ist m-fache Nullstelle von f

b) die übrigen Nullstellen von f sind genau die Punkte der Folge $\{a_n\}$, und zwar mit der Vielfachheit, wie a_n in der Folge vorkommt.

f hat die Darstellung $f(z) = z^m \cdot g(z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}$

mit $m_n \in \mathbb{N}_0$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz u. ohne Nullstelle. Jede ganze Funktion $\tilde{f}$ mit a) und b) hat diese Gestalt.

Bem: ① In b) ist gemeint, daß

$$\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 0 \} = \{ a_k : k \in \mathbb{N} \}$$

und daß die Vielfachheit von $a \in \mathbb{C}$ als Nullstelle von f gegeben ist durch $\# \{ k \in \mathbb{N} : a_k = a \}$.

Im Unterschied zum Satz von Mittag-Leffler ist es hier von Bedeutung, daß die betrachtete Punktfolge nicht nur aus verschiedenen Gliedern besteht, das ermöglicht die zusätzliche Vorgabe von Nullstellenordnungen. Die alternative (äquivalente) Formulierung lautet:

gegeben: $\begin{cases} b_k & \text{paarweise verschieden, } b_k \neq 0, \ |b_k| \to \infty \\ n_k \in \mathbb{N} & , \ m \in \mathbb{N} \end{cases}$

gesucht: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\text{Nullstellenmenge} = \{ b_k : k \in \mathbb{N} \} \cup \{ 0 \}$$

(b_k: Ordnung n_k; 0: Ordnung m)

f ist von der Form $f(z) = \underbrace{h(z)}_{\text{ganz, ohne Nullstelle}} \cdot z^m \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/a_k)^{n_k} \cdot h_k(z)$

mit ganzen Funktionen h_k ohne Nullstellen. Die im Satz gewählte Form läßt die Struktur der h_k besser erkennen.

② Bei Conway p. 170 findet man folgende Version:

> $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\{z_k\}$ Folge in $\mathbb{C}$ aus paarweise verschiedenen Punkten, die sich höchstens zum Rand hin häufen sowie $\{n_k\}$ eine Folge in $\mathbb{N} \Longrightarrow \exists\, f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellen der Vielfachheit n_k genau in z_k

Beweis: Man verfährt ähnlich wie in 11.1 und modifiziert den möglicherweise nicht konvergenten Ansatz $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ durch Multiplikation mit konvergenzerzeugenden Faktoren.

Sei $R > 0$. Für $n \geq n_R$ ist $|a_n| \geq 2R \Longrightarrow$

$$\left|1 - z/a_n\right| \leq 1/2 \quad \forall\, z \in \overline{D}_R(0)$$

Es gilt für diese z (vgl. p. 166)

$$\log\left(1 - z/a_n\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k$$

Mit $m_n \in \mathbb{N}$ noch zu bestimmen sei $p_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k$.

Für den "Rest" $r_n(z) := \log\left(1 - z/a_n\right) + p_n(z)$ ist

$$* \quad \begin{cases} |r_n(z)| = \left| \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right| \leq \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^k = \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} \frac{1}{1 - R/|a_n|} \end{cases}$$

($\leq$ wegen $|z| \leq R$)

vorausgesetzt $n \geq n_R$.

Angenommen, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ läßt sich ein Index m_n finden (R noch fest) mit

$$** \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1} < \infty$$

Aus * folgt $r_n \to 0$ bei $n \to \infty$ glm. auf $\overline{D}_R(0)$ sowie die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=n_R}^{\infty} r_n$ auf dieser Kreisscheibe.

Wir setzen dann { genauer: f_R, da noch nicht klar ist, ob m_n von R abhängt }

$$f_0(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)}, \quad |z| \leq R$$

Gemäß

$$\prod_{n=n_R}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)} = \prod_{n=n_R}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{r_n(z) - \log\left(1 - z/a_n\right)}$$

$$= \prod_{n=n_R}^{\infty} e^{r_n(z)} = \exp\left(\sum_{n=n_R}^{\infty} r_n(z)\right) \neq 0$$

folgt Holomorphie von f_0 auf $D_R(0)$.

Zu zeigen ist noch die Existenz von geeigneten Zahlen m_n. Wir zeigen sogar mehr: m_n läßt sich uniform für alle $R>0$ bestimmen, so daß ** gilt. Dann kann man m_n unabhängig von R wählen, die Polynome p_n werden dadurch unabhängig von R definiert, und man sieht: $f_0(z)$ liefert eine ganze Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Sie setzt $m_n := n$.

Die Reihe in ** hat Konvergenzradius ρ mit

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{n+1}} =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{1+1/n} = 0,$$

da $|a_n| \to \infty$, $\sqrt[n]{n+1} \to 1$. Es folgt $\rho = \infty$, so daß mit der Wahl $m_n := n$ Konvergenz unabhängig von R vorliegt.

Die Funktion $f_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist 0 genau für $z = a_n$ (Konvergenzdef. des unendlichen Produkts!), multipliziert man noch mit z^m, so ist $f(z) = z^m f_0(z)$ gefunden.

Ist $\tilde{f}$ eine weitere Funktion mit a), b) aus dem Satz, so ist der Quotient $\tilde{f}/f$ auf $\mathbb{C}$ definiert und ohne Nullstelle, nach 8.3 kann man schreiben $\tilde{f}/f = e^h$, also folgt mit $g = e^h$ die Behauptung.

□

KOROLLAR: Jede auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist Quotient zweier ganzer Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Beweis: F meromorph auf $\mathbb{C}$ heißt: es gibt eine Folge $b_k \in \mathbb{C}$ mit $b_k \to \infty$, die b_k sind Polstellen von F, auf $\mathbb{C} - \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist F holomorph. Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ als Nullstellenmenge bei entsprechender Ordnung. Dann ist $f := F \cdot g$ ganze Funktion. □

Anwendung: Produktdarstellung des Sinus

Wir suchen eine ganze Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Nullstellen genau in $\mathbb{Z}$ der Vielfachheit 1. Das Produkt

$$z \cdot \prod_{\ell=-\infty,\, \ell \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) := z \cdot \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\ell}\right)$$

konvergiert nicht absolut, da $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{|z|}{\ell} = \infty$. Wir bringen einen geeigneten konvergenzerzeugenden Faktor an: eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) e^{z/\ell} \quad , \quad \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\ell}\right) e^{-z/\ell}$$

bereits absolut konvergiert.

Sei $$f(z) := z \left\{ \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) e^{z/\ell} \right\} \left\{ \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\ell}\right) \cdot e^{-z/\ell} \right\}$$

$$= z \cdot \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right)$$

↑ die Multiplikation ist erlaubt!

Nun bilde man (Begründung für die Rechnung!)

$$f'(z) = \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{2z}{n^2}\right) \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) \right\} =$$

$$\prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) + z \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2z}{z^2 - n^2}\right) \right\} \prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cdot \cot(\pi z)$$

$$= \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad g(z) := \sin(\pi z).$$

Alle Formeln gelten für $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Sei G ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Nach Satz 8.3 gilt

$$f(z) = \exp \tilde{f}(z), \quad g(z) = \exp \tilde{g}(z)$$

dort, wobei $\tilde{g}, \tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ holomorph geeignet zu wählen sind.

Erneute Differentiation liefert

$f'(z) = \tilde{f}'(z)\, f(z)$, $g'(z) = \tilde{g}'(z)\, g(z) \Longrightarrow$

$\tilde{f}' = \tilde{g}'$, so daß $\tilde{f} = \tilde{g} + c$ auf G. Es folgt

$$f(z) = \exp(\tilde{g}(z) + c) = e^c \cdot g(z)$$

auf G. c hängt zunächst vom Gebiet ab, aber da $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ selbst zusammenhängend ist, muß nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen $f = e^c g$ auf $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ sein (f, g sind holomorph auf $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$!).

Wir bestimmen e^c; dazu brachte man

$\frac{1}{z} \sin(\pi z) \xrightarrow[z \to 0]{} \pi$, $\prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) \xrightarrow[z \to 0]{} 1$ (Logarithmus bilden)

$\Rightarrow$ $e^c = \pi$, also

(reelle Version An. II, p. 107)

Produktdarstellung des Sinus:

$$\boxed{\sin \pi z = \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) \cdot \pi z, \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}}$$

$\underset{z = 1/2}{\Longrightarrow}$ Wallisches Produkt:

$$\boxed{1 = \frac{\pi}{2} \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4l^2}\right).}$$

Bem: ① Da wir f'/f diskutieren, untersuchen wir eben mehr oder weniger "$\log f(z)$". Man hätte dies konsequent ausnutzen können.

② Mit $\cos(\pi z) = \sin \pi(\frac{1}{2} - z)$ bekommt man eine Produktformel für Cosinus.

§ 12 Der Riemannsche Abbildungssatz

Als letzten Satz beweisen wir nun den Riemannschen Abbildungssatz (Diss. Göttingen 1851), der garantiert, daß jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$, für das man es überhaupt erhoffen kann, biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $D_1(0)$ abgebildet werden kann. Das hat zur Konsequenz, daß sich die Funktionentheorie auf Ω nicht von der auf $D_1(0)$ unterscheidet.

Für welche Gebiete $\Omega \subset \mathbb{C}$ kann man nun die Existenz von $f: \Omega \to D_1(0)$ biholomorph erwarten? Sicher nicht für $\Omega = \mathbb{C}$, denn f ist ja beschränkt und nach Liouville konstant. Andrerseits muß Ω einfach zusammenhängend sein: Ist γ ein geschlossener Weg in Ω, so ist $f \circ \gamma$ geschlossen in $D_1(0)$, also nullhomotop. Ist $H: [0,1] \cdot [a,b] \to D_1(0)$ eine Homotopie für $f \circ \gamma$, die die Kurve auf einen Punkt zusammenzieht, so leistet $f^{-1} \circ H$ das Entsprechende für γ. Das Überraschende ist nun, daß weiter keine Voraussetzungen nötig sind: Ganz gleich wie kompliziert Ω das Gebiet Ω aussieht, wenn es nur einfach zusammenhängend und $\neq \mathbb{C}$ ist, läßt es sich biholomorph auf $D_1(0)$ abbilden. (Es gibt wirklich komplizierte einfach zshgde Gebiete $\neq \mathbb{C}$, bei denen nicht einmal die Existenz einer bi-stetigen Abbildung $\Omega \to D_1(0)$ evident ist.)

THEOREM 12.1 (Riemannscher Abbildungssatz)

> Jedes von $\mathbb{C}$ verschiedene einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ kann biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $D_1(0) \subset \mathbb{C}$ abgebildet werden.

Wir benötigen einige Vorbereitungen

SATZ 12.2: (Lemma von Schwarz, Teil 1)

Sei $D = D_1(0)$ und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(D) \subset D$ und $f(0) = 0$. Dann gilt:

a) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.

b) Ist für ein $z_0 \neq 0$ $\quad |f(z_0)| = |z_0|$, so gibt es $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, mit $f(z) = \alpha z$, $z \in D$.

Beweis: Wir schreiben $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ auf D. Dann ist $f(z)/z$ holomorph mit ($f(D) \subset D$!)

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r} \quad \text{für } |z| = r < 1$$

Nach dem Maximum-Prinzip für den Betrag (Satz 5.4) folgt

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1/r \quad \text{für} \quad |z| \le r.$$

Mit $r \uparrow 1$ folgt dann die Behauptung a).

Gibt es $z_0 \in D-\{0\}$ mit $\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$, so hat $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ ein inneres Maximum, nach 5.4 i) folgt $\frac{f(z)}{z} \equiv \alpha$ mit $|\alpha| = 1$.

□

Bem: Erfüllt $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ $f(0) = 0$, $|f(z)| \le M$ mit $M > 0$, so liefern dieselben Argumente

$$|f(z)| \le \frac{1}{R} M |z| \qquad \forall z \in D_R(0)$$

mit „=" an einer inneren Stelle $\neq 0$ nur im Fall

$$f(z) = \frac{M}{R} \alpha z \qquad \forall z \in D_R(0)$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

SATZ 12.3: (Lemma v. Schwarz, Teil 2)

Sei $D = D_1(0)$ und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(D) \subset D$ und $f(0) = 0$. Man schreibe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt:

$|f'(0)| = |a_1| \le 1$, und im Fall $|a_1| = 1$ ist

$f(z) = a_1 z$, $z \in D$.

Beweis: Wie oben ist $\frac{f(z)}{z}$ holomorph auf D mit Taylorentwicklung

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{n-1}$$

Bei $z \to 0$ bleibt $\frac{f(z)}{z}$ gemäß a) von 12.2 durch 1 beschränkt, der Rest $\sum_{n \geq 2} a_n z^{n-1}$ geht gegen 0, also $|a_1| \leq 1$.

Sei $|a_1| = 1$. Wir schreiben

$$f(z) = a_1 z + a_m z^m + \text{"Rest"}$$

und nehmen an, daß $m \geq 2$, $a_m \neq 0$, was zum Widerspruch zu führen ist.

Offenbar $\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_m z^{m-1} + \text{"Rest"}$.

Man wählt $z \in \mathbb{C}$ mit $a_m z^{m-1} = a_1$. Mit $C > 0$ geeignet gilt für $0 < t \ll 1$

$$\frac{f(tz)}{tz} = a_1 + a_m t^{m-1} z^{m-1} + R,$$

$$|R| \leq C t^m$$

Also: $$\left| \frac{f(tz)}{tz} \right| = |a_1 (1 + t^{m-1}) + R|$$

$$\geq 1 + t^{m-1} - C t^m .$$

$\uparrow$ $|a_1| = 1$

Für t sehr klein folgt

$$\left| \frac{f(tz)}{tz} \right| > 1$$

im Widerspruch zu a) von Satz 12.2. □

DEF 12.1: Seien U, V offen. Eine holomorphe Bijektion $f: U \to V$ heißt ein Isomorphismus von U auf V - im Falle $U = V$ nennt man f einen Automorphismus von U - , falls f^{-1} ebenfalls holomorph ist.

Bem: Für Gebiete ist f^{-1} immer holomorph! (vgl. Bem. + Kor. nach Satz 10.4, speziell p. 198)

Als Anwendung der Sätze 12.2, 3 und auch für spätere Zwecke beschreiben wir die Automorphismen von $D_1(0)$.

SATZ 12.4: Sei $f: D \to D$, $D_1(0) = D$, ein Automorphismus. Sei $\alpha := f^{-1}(0)$. Dann gibt es $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}, \quad z \in D.$$

Bem: Für $\omega \in \mathbb{R}$ ist $z \mapsto e^{i\omega} z$ eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn mit Drehwinkel ω, induziert also trivialerweise einen Automorphismus von D.

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Wir setzen

$$g_a(z) = (a - z) / (1 - \bar{a} z)$$

(Spezialfall einer sogenannten gebrochen linearen Transformation → Literatur!)

Offenbar ist g_a holomorph auf $D_{1/|a|}(0) \supset D_1(0)$ mit

$$|g_a(z)| = 1 \quad \text{auf } |z| = 1,$$

denn für $|z| = 1$ ist $\frac{a - z}{1 - \bar{a} z} = (a - z) / (1 - \frac{\bar{a}}{\bar{z}}) =$

$\bar{z} \cdot (a - z) / (\bar{z} - \bar{a})$. Nach dem Maximum-Prinzip folgt

$$|g_a(z)| \leq 1 \quad \text{auf } |z| \leq 1.$$

Es gilt sogar: $|g_a(z)| < 1$ für $|z| < 1$, denn

$g_a(D)$ ist ja offene Menge und gleichzeitig $\subset \overline{D}_1(0)$.

Da g_a zudem injektiv ist, folgt:

$g_a : D \to D$ ist Automorphismus.

Man prüft leicht nach, daß $g_a \circ g_a = \mathrm{Id}$ gilt.

Außerdem ist $g_a(a) = 0$. Natürlich kann man g_a noch mit Drehungen verknüpfen $z \mapsto$ Rotation $(g_a(z))$, um weitere Automorphismen $f: D \to D$ zu erzeugen mit $f(a) = 0$. Nach 12.4 werden so aber alle Automorphismen von D beschrieben.

Beweis von 12.4: Sei g_α wie oben definiert. Dann ist

$$h := f \circ g_\alpha^{-1} : D \to D$$

ein Automorphismus mit $h(0) = 0$, und es genügt zu zeigen:

$$h(w) = e^{i\varphi} w \quad , w \in D,$$

mit φ geeignet. Nach 12.2 a) ist $|h(z)| \leq |z|$ für $z \in D$; da h^{-1} ebenfalls in 0 verschwindet, folgt auch

$$|h^{-1}(w)| \leq |w| \quad \underset{w = h(z)}{\Longrightarrow}$$

$$|z| \leq |h(z)| \quad \forall z \in D,$$

zusammen $|h(z)| = |z|$ auf D. Dies ergibt

$$\underbrace{\frac{1}{|z|}|h(z)|}_{\to |h'(0)|} \equiv 1 \quad ,$$

$z \to 0$

so daß $|h'(0)| = 1$. Nach 12.3 ist $h(z) = h'(0)\, z =: e^{i\varphi} z$.

□

Zur weiteren Vorbereitung brauchen wir noch einige Ergebnisse über das Konvergenzverhalten von Folgen holomorpher Funktionen.

SATZ 12.5: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f_k : U \to \mathbb{R}^l$ eine Folge stetiger Funktionen wie folgt:

a) Zu jeder kompakten Menge $K \subset U$ gibt es eine Konstante $M_K < \infty$ mit $|f_k(x)| \leq M_K$ für alle $x \in K$.

(„lokale Beschränktheit")

b) Jeder Punkt $a \in U$ hat eine Umgebung $V(a)$, so daß die Folge auf $V(a)$ gleichgradig stetig ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in V(a) \; : \; |f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq \varepsilon$$
$$|x_1 - x_2| \leq \delta$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}^l$ und eine Teilfolge $\{f_{k'}\}$ mit

$$f_{k'} \rightrightarrows f \quad \text{lokal glm. auf } U.$$

Bem: Das ist der Satz von Arzela-Ascoli, der mit Funktionentheorie

nichts zu tun hat. Er gilt vielmehr in entsprechender Formulierung für Funktionenfolgen auf metrischen Räumen, man vergleiche

K. Yosida, Functional Analysis. Springer (Seite 85).

Wir bekommen damit

SATZ 12.6 (Montel)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Dann hat f_n eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Die Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist nach Weierstraß (Satz 5,2) holomorph.

Beweis: Nachzuprüfen ist 12.5 b), a) wird schon vorausgesetzt.

Sei dazu $a \in U$ und $D_r(a) \subset\subset U$. Dann gibt es $M > 0$ mit

$$|f_n(z)| \leq M \quad \text{für } z \in D := D_r(a).$$

Wir zeigen: $\{f_n\}$ ist gleichgradig stetig auf $D_{r/2}(a) =: D'$.

Für $z_1, z_2 \in D'$ ist

$$|f_n(z_2) - f_n(z_1)| = \left| \int_{z_1, z_2} f_n'(z)\, dz \right| \leq$$

$$|z_1 - z_2| \cdot \max_{D'} |f_n'| .$$

Die Abschätzung $f_n'(z)$, $z \in \overline{D'}$, kann wie folgt kontrolliert werden. Nach der Cauchy Integralformel ist $(z \in \overline{D'})$

$$|f_n'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} L(\partial D) \frac{M}{(r/2)^2} = \frac{4M}{r},$$

also $|f_n(z_2) - f_n(z_1)| \leq \frac{4M}{r} |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in D'$.

Dann ist f_n trivialerweise gleichmäßig stetig auf D', Satz 12.5 liefert die Behauptung. □

Nun zum

Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes:

Sei Ω ein einfach zshgdes Gebiet $\neq \mathbb{C}$, nach Verschiebung kann man o.E.

$$0 \in \mathbb{C} - \Omega$$

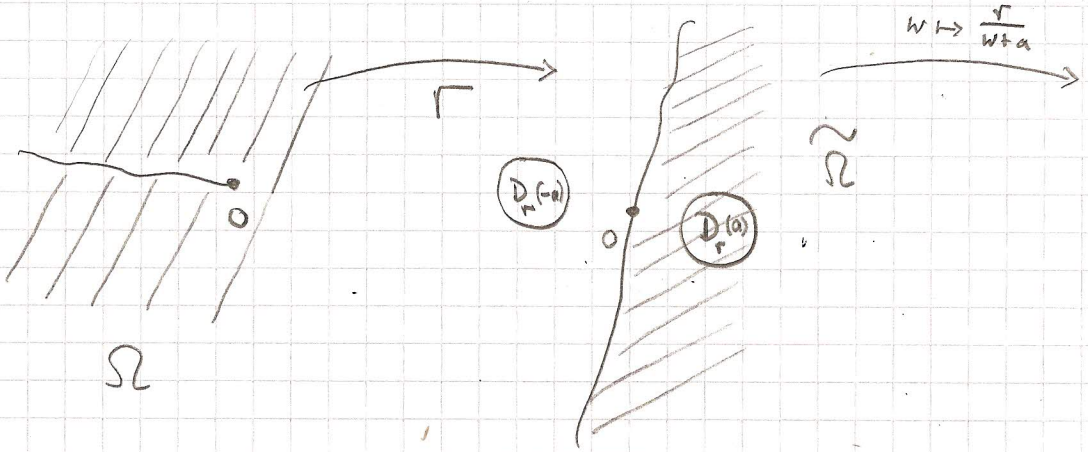
annehmen (Bedeute: hier geht $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein, also $\mathbb{C} - \Omega \neq \emptyset$). Da Ω einfach zshgd ist und $z \to 1/z$ dort holomorph, gibt es nach Satz 8.2 einen Logarithmus $L : \Omega \to \mathbb{C}$, also eine holomorphe Funktion mit

$$\exp(L(z)) = z$$

(vgl. Def. 8.1). Durch $\sqrt{z} := \exp\left(\frac{1}{2} L(z)\right)$ wird dann eine

holomorphe Quadratwurzel auf Ω definiert. $\widetilde{\Omega} := $ Bild von Ω unter $\sqrt{\ }$ ist offen (Satz 5.3 von der Gebietstreue) und $\sqrt{\ }$ ist injektiv ($\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2} \Longrightarrow \exp\left(\frac{1}{2} L(z_1)\right)^2 = \exp\left(\frac{1}{2} L(z_2)\right)^2 \Longrightarrow \exp(L(z_1)) = \exp(L(z_2)) \Longrightarrow z_1 = z_2$), so daß $\sqrt{\ }$ Ω biholomorph auf $\widetilde{\Omega}$ abbildet. Da $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{C} - \{0\}$ gilt, findet man $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $r > 0$ mit

$$D_r(a) \subset \widetilde{\Omega}.$$



Offenbar gilt $D_r(-a) \cap \widetilde{\Omega} = \emptyset$: sei $w = \sqrt{z}$, $z \in \Omega$, aus $D_r(-a)$, also $-w \in D_r(a)$, d.h. $-w = \sqrt{\tilde{z}}$, $\tilde{z} \in D_r(a)$. Wie vorhin folgt aus $w^2 = (-w)^2$ dann $z = \tilde{z}$ im Widerspruch zur Injektivität von $\sqrt{\ }$. Nun sei

$$h: \Omega \to \mathbb{C}, \quad h(z) := \frac{r}{\sqrt{z} + a}.$$

Obige Rechnung zeigt Wohldefiniertheit von h ($\sqrt{z} + a$ nirgends 0 auf Ω),

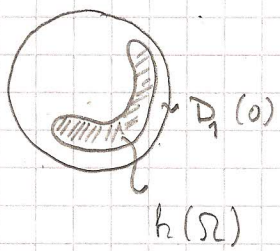
h ist zudem injektiv und somit eine biholomorphe Abbildung von Ω auf $h(\Omega)$ (offen!). $D_r(-a) \cap \widetilde{\Omega} = \emptyset$ bedeutet

$$|\sqrt{z} + a| > r \qquad \forall z \in \Omega,$$

so daß

$$h(\Omega) \subset D_1(0).$$

Also können wir Ω zumindest biholomorph in $D_1(0)$ abbilden.



Sei ab jetzt $z_0 \in \Omega$ ein fixierter Punkt. Dann ist $\alpha := h(z_0) \in D_1(0)$. Im Fall $\alpha = 0$ ändern wir nichts. Für $\alpha \neq 0$ sei

$$g_\alpha(w) = \frac{\alpha - w}{1 - \bar{\alpha} w}$$

und $h_\alpha := g_\alpha \circ h$. Dann ist auch h_α eine biholomorphe Abbildung $\Omega \to h_\alpha(\Omega) \subset D_1(0)$ mit $h_\alpha(z_0) = 0$. Folglich ist

$$\mathcal{H} := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f(\Omega) \subset D_1(0),\ f(z_0) = 0,\ f \text{ injektiv} \}$$

nicht die leere Menge. Ist $f \in \mathcal{H}$ und $D_\rho(z_0) \subset \Omega$, so gilt

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2}\, dw \qquad \Longrightarrow$$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{\rho} \sup |f| \leq \frac{1}{\rho},$$

da $|f| \leq 1$. Also ist

$$S := \sup_{f \in \mathcal{H}} |f'(z_0)| < \infty$$

und natürlich > 0, da nach Bem ① von p. 198 wegen der Injektivität von $f \in \mathcal{H}$ die Ableitung nirgends 0 sein kann. Wir wählen eine Folge $\{f_n\}$ in $\mathcal{H}$ mit

$$|f_n'(z_0)| \longrightarrow \rho \text{ für } n \to \infty,$$

nach Montel hat $\{f_n\}$ eine gleichmäßig (lokal) konvergente Teilfolge, o.E. gelte bereits

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{lokal auf } \Omega.$$

Nach Weierstraß ist f holomorph und die Konvergenz lokal gleichmäßig für jede Ableitung, so daß

$$|f'(z_0)| = \rho, \quad |f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \Omega$$

(Aus $|f_n(z)| < 1$ folgt im Limes nur ≤ 1 !). $f'(z_0) \neq 0$ schließt aus, daß f konstant ist. Nach dem Satz über Gebietstreue folgt Offenheit von $f(\Omega)$, also (da wir bereits $f(\Omega) \subset \overline{D_1}(0)$ wissen)

$$f(\Omega) \subset D_1(0).$$

Die Grenzfunktion füllt trivialerweise $f(z_0) = 0$, so daß $f \in \mathcal{H}$

folgt, sobald wir Injektivität bewiesen haben:

Gelte etwa $f(z_1) = f(z_2) =: w$, wobei $z_1 \neq z_2$ aus Ω. Dann hat $f - w =: \tilde{f}$ zwei isolierte Nullstellen bei z_1, z_2, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$ mit $\overline{D}_\varepsilon(z_1) \cap \overline{D}_\varepsilon(z_2) = \emptyset$ und

$$\tilde{f}(z) \neq 0 \quad \text{für } z \in \overline{D}_\varepsilon(z_k) - \{z_k\}, \quad k = 1,2.$$

Setze $\delta := \min_{\partial D_\varepsilon(z_1)} |\tilde{f}| > 0$ und wähle $\nu_0 \times > 1$ mit

$(\tilde{f}_n := f_n - w)$ $\quad |\tilde{f}_n(z) - \tilde{f}(z)| < \delta$, $z \in \partial D_\varepsilon(z_1)$, $n \geq \nu_0$,

also: $|\tilde{f}_n(z) - \tilde{f}(z)| < |\tilde{f}(z)|$ für $z \in \partial D_\varepsilon(z_1)$,

nach 10.5 haben $\tilde{f}_n$ und $\tilde{f}$ dieselbe Zahl von Nullstellen in $D_\varepsilon(z_1)$,

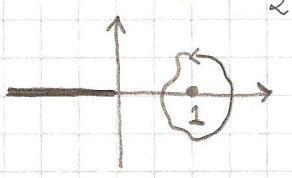
d.h. $\tilde{f}_n(z_n) = 0$, für ein $z_n \in D_\varepsilon(z_1)$, d.h. $f_n(z_n) = w$.

Analog findet man $z_n' \in D_\varepsilon(z_2)$ mit $f_n(z_n') = w$ für $n \geq \nu_0$,

und da $z_n \neq z_n'$ gelten muß, hat man einen Widerspruch zur Injektivität.

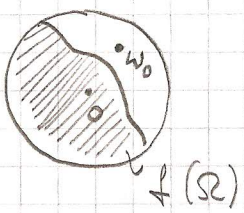
Damit haben wir in der Menge $\mathcal{H}$ ein möglichst großes Element f gefunden, d.h. $|f'(z_0)|$ ist maximal, und man vermutet, daß f nun Lösung des Problems ist, also $f(\Omega) = D_1(0)$ füllt. Dazu müssen wir nochmals die Struktur von Ω benutzen. Bisher haben wir ja nur $0 \notin \Omega$ benutzt und die Aussage, daß auf Ω eine Logarithmusfunktion existiert.

Dazu muß Ω aber nicht einfach zshgd sein, denn auf



$\mathbb{C} - ((-\infty, 0] \cup \{1\})$ existiert ja der Hauptzweig des Logarithmus, aber das Gebiet ist nicht einfach zusammenhängend. Wir werden jetzt sehen, wie man die Bedingung an Ω einsetzt.

<u>Annahme:</u> $f(\Omega) \subsetneq D_1(0)$, d.h. $\exists\, w_0 \in D_1(0) - f(\Omega)$.



Sei $k_0(w) := \dfrac{w_0 - w}{1 - \overline{w}_0 w}$; k_0 ist wegen $|w_0| < 1$ Automorphismus von $D_1(0)$ mit $k_0(w_0) = 0$. Dann ist $\tilde{f} := k_0 \circ f : \Omega \to \tilde{f}(\Omega)$ biholomorph mit $\tilde{f}(\Omega) \subset D_1(0)$ und $\tilde{f}(z) \neq 0$ überall, denn k_0 verschwindet genau nur für w_0. Da Ω einfach zusammenhängt, ist Satz 8.3 anwendbar: es gibt eine holomorphe Funktion $l : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} = \exp \circ\, l$ auf Ω. Wir definieren

$$\sqrt{\tilde{f}} := \exp\left(\tfrac{1}{2} l\right) : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Wegen $\left(\sqrt{\tilde{f}(z)}\right)^2 = \exp(l(z)) = \tilde{f}(z) \in D_1(0)$

folgt Bild $\sqrt{\tilde{f}} \subset D_1(0)$. Ist $\sqrt{\tilde{f}(z_1)} = \sqrt{\tilde{f}(z_2)}$,

so gilt

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}\ell(z_1)\right)^2 = \exp\left(\tfrac{1}{2}\ell(z_2)\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\tilde{f}(z_1) = \exp(\ell(z_1)) = \exp(\ell(z_2)) = \tilde{f}(z_2),$$

und da $\tilde{f}$ bijektiv ist, folgt $z_1 = z_2$. $\sqrt{\tilde{f}}$ ist per Definition ohne Nullstelle, da $\exp \neq 0$. Mit $w_1 := \sqrt{\tilde{f}(z_0)}$ sei noch

$$k_1(w) = \frac{w_1 - w}{1 - \overline{w}_1 w}, \quad w \in D_1(0).$$

Dann ist $F := k_1 \circ \sqrt{\tilde{f}}$ biholomorphe Abbildung von $D_1(0)$ auf sein Bild mit $F(z_0) = 0$, also $F \in \mathcal{H}$.

Wir zeigen: $* \quad |F'(z_0)| > |f'(z_0)| = r$, was der Konstruktion widerspricht.

$G: w \mapsto k_0^{-1}\left((k_1^{-1}(w))^2\right)$ ist eine holomorphe Abbildung $D_1(0) \to D_1(0)$ mit

$$G(F(z)) = f(z) \Longrightarrow$$

$$G = f \circ F^{-1} \text{ auf } F(\Omega)$$

Außerdem gilt $G(0) = G(F(z_0)) = f(z_0) = 0$.

Nach Satz 12.3 folgt $|G'(0)| \leq 1$ mit $=$ nur für $G(w) = G'(0)\,w$ auf $D_1(0)$. G ist aber ersichtlich keine

Drehung, also von der Gestalt $a \cdot w$ mit $a \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$|G'(0)| < 1 \implies$$

$$f'(z_0) = G'(F(z_0)) \cdot F'(z_0) = G'(0)\, F'(z_0), \quad \text{d.h.}$$

$$|f'(z_0)| < |F'(z_0)|.$$

Damit ist der Widerspruch erreicht, der Abbildungssatz bewiesen. □

Bem: ① Der Beweis des Abbildungssatzes ist nicht konstruktiv, nur in seltenen Fällen kann man eine biholomorphe Abbildung $\Omega \to D_1(0)$ explizit angeben.

Beispiel: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \longrightarrow D_1(0)$

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

Man rechne das Beispiel nach. In der Literatur sind viele weitere Spezialfälle explizit ausgeführt.

② Über das Verhalten der Riemannschen Abbildungsfunktion am Rand von Ω hat Carathéodory 1913 bewiesen: Ist $\partial\Omega$ z.B. Bild von $\partial D_1(0)$ unter einer bistetigen Abbildung, so kann $f : \Omega \to D_1(0)$

stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden und liefert dann einen Homöomorphismus

$\overline{\Omega} \to \overline{D_1(0)}$.

Man vergleiche S. Lang, p. 299 f.

(3) Die folgenden Aussagen sind für $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen äquivalent

(i) Ω einfach zusammenhängend (Satz 9.5)

(ii) Jeder Zyklus in Ω ist 0 homolog

(iii) es gilt der Cauchy Integralsatz:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \forall f: \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}$$

Γ Zyklus in Ω

(iv) Ω ist homöomorph zu $D_1(0)$ ((i) $\Leftrightarrow$ (iv) ist trivial)

(v) Ω ist biholomorph zu $D_1(0)$

(vi) Jede holomorphe Funktion $h: \Omega \to \mathbb{C} - \{0\}$ hat einen Logarithmus $\tilde{h}$, d.h. $\exp \tilde{h} = h$.

Damit beenden wir die Vorlesung, obwohl sich erst jetzt viele Anwendungen erschließen.