Differentialgeometrie

M. Fuchs

(Sommersemester 2020)

Vorlage: Manfredo do Carmo,
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen,
Viewweg Verlag

bzw. ....., Differential Geometry of Curves and
Surfaces, Prentice-Hall

Kapitel 0 Einleitung

Die Vorlesung sollte eigentlich als "Elementare Differentialgeometrie" bezeichnet werden, denn sie widmet sich fast ausschließlich dem Studium von

Kurven und Flächen im Raum $\mathbb{R}^3$.

Dabei unterscheidet man zwischen lokalen und globalen Aussagen: Beispielsweise werden wir in natürlicher Weise das Krümmungsverhalten von Flächen lokal in der Nähe eines Punktes definieren oder die sogenannte lokale kanonische Darstellung von Kurven in $\mathbb{R}^3$ kennenlernen. Ein globaler Satz ist dagegen die folgende Charakterisierung von Sphären im Raum:

> Ist S eine kompakte, zusammenhängende, reguläre Fläche mit konstanter Gauß-Krümmung, so ist S eine Sphäre.

Hier ermöglicht also die Information über das Verhalten der lokalen Größe "Gauß-Krümmung" eine präzise Beschreibung der globalen Gestalt der Fläche.

Etwas abstrakter formuliert handelt es sich bei den von uns untersuchten Kurven und Flächen um 1- bzw. 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$, insbesondere haben wir damit in jeder Tangentialebene an eine Fläche in natürlicher Weise ein Skalarprodukt (, nämlich Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts). Zu jeder Tangentialebene existiert ein bis auf das Vorzeichen eindeutiger Normalenvektor, und die lokale Änderungsrate des Normalenfeldes misst anschaulich die Krümmung der Fläche. M.a.W.: Im Rahmen unserer Betrachtungen werden alle geometrischen Größen von der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ induziert.

Eine leichte Verallgemeinerung würde sich ergeben, wenn man $\mathbb{R}^3$ mit einem anderen Skalarprodukt versieht. Ein deutlich größerer Grad an Allgemeinheit liegt vor, wenn dieses Skalarprodukt (stetig) vom Punkt abhängen darf. In der Riemannschen Geometrie trennt man sich zunächst ganz von einem umgebenden Raum, d.h. man betrachtet n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einer differenzierbaren Struktur, erklärt damit Tangentialräume in jedem Punkt und verlangt schließlich, dass man diese Tangentialräume in vernünftiger Weise zu Skalarprodukträumen machen kann. Dies wiederum ermöglicht die Entwicklung geometrischer Begriffe, allerdings ist hierzu ein sehr großer formaler Aufwand nötig, was den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde.

Kapitel I Kurventheorie

§ 1 Grundbegriffe und Beispiele

Definition: Eine differenzierbare Kurve (genauer: eine parametrisierte diff'bare Kurve) ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall, $n \geq 2$.

Bemerkungen: 1.) Das Wort "diff'bar" hat hier eine andere Bedeutung als in der Analysis, wo man damit nur die Existenz der ersten Ableitung meint. Für die meisten Betrachtungen kommen wir mit C^2 (= 2 mal stetig diff'bar) aus.

2.) $n = 2 \rightsquigarrow$ parametrisierte Kurve in der Ebene

$n = 3 \rightsquigarrow$ -"- Raumkurve

3.) Die Kurve α ist nicht zu verwechseln mit der

Punktmenge $\quad \text{Spur}\ \alpha = \{\alpha(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$.

Die Spur repräsentiert den Verlauf der Kurve "optisch", man hat aber keinerlei Information, wo ($= \alpha(t)$) man sich zur Zeit $t \in I$ mit welcher Geschwindigkeit ($= \alpha'(t)$) bewegt. Die Parametrisierung ist ein Fahrplan für Spur α.

4.) Ist $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, so nennt man

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \quad (\text{oft auch } \dot{\alpha}(t))$$

den Tangentenvektor (oder Geschwindigkeitsvektor) der Kurve α bei t.

Sei $t_0 \in I$ und $\alpha'(t_0) \neq 0$. Dann beschreibt

$$\boxed{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha'(t_0)\,(t - t_0) + \alpha(t_0)}$$

eine Gerade mit Richtung $\alpha'(t_0) \in \mathbb{R}^n$, die zur

Zeit t_0 durch den Punkt $\alpha(t_0)$ geht. Man nennt diese Gerade die Tangente an die Kurve α in t_0.

Ist $t_0 \in I$ ein singulärer Punkt von α, d.h. per Definition $\alpha'(t_0) = 0$, so degeneriert obige Abbildung zur konstanten Funktion $t \mapsto \alpha(t_0)$, die geometrische Vorstellung einer Tangente als Gerade geht verloren. Deshalb betrachtet man in der Differentialgeometrie meist nur folgende Klasse:

Definition: Eine Kurve (natürlich diff'bar!) $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls gilt:

$$\boxed{\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.}$$

Es gibt also keine singulären Punkte.

Bemerkung: Für reguläre Kurven misst man, wie schnell die Tangente lokal bei t_0 ihre Lage variiert und nimmt

dies als Maß dafür, wie stark die Kurve bei t_0 gekrümmt ist.

Beispiele:

① Gerade in $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R} \ni t \mapsto (at+b, ct+d)$

mit gegebenen Werten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Tangentenvektor an t: $(a, c) \in \mathbb{R}^2$

Es liegt also eine reguläre Kurve vor, falls $(a,c) \neq (0,0)$.

② Kreislinie in $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) = e^{it}$

Tangenvektor $i e^{it}$ hat überall Länge 1 (= konstante Geschwindigkeit), die Kurve ist überall regulär, jeder Punkt wird ∞ oft durchlaufen.

Spur $= S^1 := \{ z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$

Offenbar haben

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) := e^{it},$$

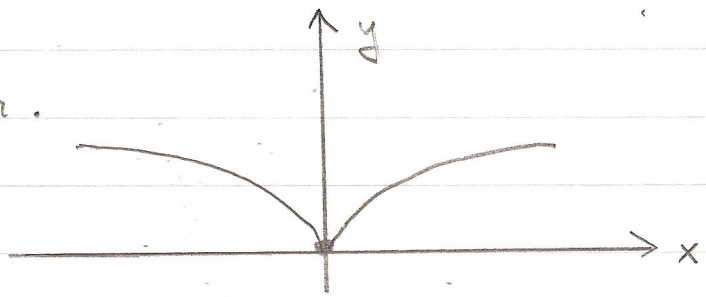
$$\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) := e^{2it},$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := e^{-it}$$

alle S^1 als Spur. Die Parametrisierung β hat die doppelte Geschwindigkeit von α ($\beta'(t) = 2i\, e^{it} \Rightarrow |\beta'(t)| \equiv 2 = 2\,|\alpha'(t)|$), bei γ wird S^1 entgegengesetzt zum Durchlaufsinn von α passiert.

③ $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (t, |t|)$, ist <u>keine differenzierbare Kurve</u>,

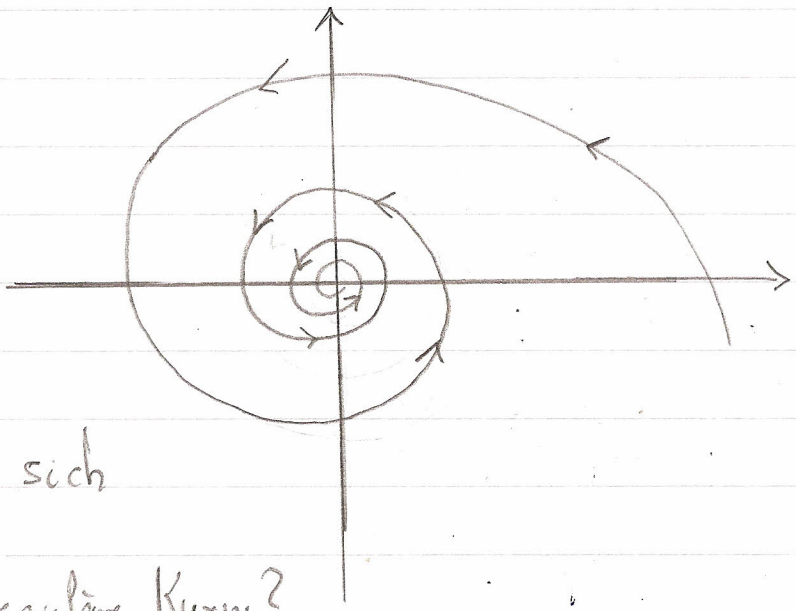
④ die <u>Neil'sche Parabel</u> $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (t^3, t^2)$ hingegen schon.



Sie erfüllt mit $x = x(t) = t^3$, $y = y(t) = t^2$ die Gleichung $y^3 = x^2$ ($\Leftrightarrow y = |x|^{2/3}$), d.h. ihre Spur ist der Graph der reellen Funktion $x \mapsto |x|^{2/3}$. Dieser Graph hat in $(0,0)$ eine "Spitze", augenscheinlich existiert keine Tangente, und dies entspricht dem Umstand, dass $t = 0$ singulärer Punkt von α ist. Bei $t \to 0$ wird $|\alpha'(t)|$ immer kleiner, so dass die Spitze mit Geschwindigkeit 0 durchlaufen wird.

⑤ Logarithmische Spirale: Sei $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (a \cdot e^{bt} \cos t, a e^{bt} \sin t)$, mit Konstanten $a > 0$, $b < 0$. Die Anteile $\cos t$, $\sin t$ beschreiben eine Bewegung um $(0,0)$, die sich bei $t \to \infty$ auf Grund des Anteils e^{bt} mit

$b < 0$ immer enger zusammenzieht, bei $t \to -\infty$ dagegen immer weiter von $(0,0)$ entfernt.



Handelt es sich um eine reguläre Kurve?

< Übungen: weitere Bsple. für parametrisierte Kurven, vgl. Do Carmo, p. 7, 4. und 5. > □

Bis jetzt haben wir im Sinne der Definition "Kurven" als Abbildungen $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ angesehen. In der Praxis hat man es oft mit "1-dimensionalen" Punktmengen in $\mathbb{R}^n$ zu tun, die noch gar nicht parametrisiert

sind. Dann stellt sich die Frage, ob eine reguläre Parametrisierung zumindest lokal möglich ist. Allgemein führt dies auf den Begriff der

1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$

als natürliche Verallgemeinerung parametrisierter Kurven. Darauf wollen wir nicht eingehen, stattdessen betrachten wir Beispiele:

① Implizite Kurven (ebener Fall)

a) Die Gleichung $ax + by + c = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$, beschreibt die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by+c = 0\} =: M$ in der Ebene. Ist $b \neq 0$, so ist M Graph von $x \mapsto -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, m.a.W.: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := \left(t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}\right)$, ist eine reguläre Parametrisierung von M. Für $a \neq 0$ gilt entsprechend $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$, und eine

reguläre Parametrisierung wird geliefert von $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$\beta(t) := \left(-\frac{b}{a}t - \frac{c}{a}, t\right)$.

b) Sei allgemeiner $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$. Ist $(x_0, y_0) \in M$ und gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so findet man ein Intervall I um x_0 und eine Funktion $\omega: I \to \mathbb{R}$ mit

$$M \cap \text{Umgebung von } (x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R}^2 =$$

$$\{(t, \omega(t)) : t \in I\},$$

d.h. M ist lokal bei (x_0, y_0) durch

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t, \omega(t))$$

regulär parametrisiert. (Es gilt $\alpha'(t) = (1, \omega'(t)) \neq (0,0)$.)

Entsprechend kann man im Fall $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ die Menge M lokal bei (x_0, y_0) in der Form $(\tilde{\omega}(t), t)$,

$t \in$ Intervall um y_0, parametrisieren.

Beweis: Satz über implizite Funktionen.

c) Im konkreten Fall gibt die Theorie oft nur unbefriedigende Antworten, was z.B. die Größe des Auflösungsintervalls angeht. Man rechnet besser direkt: Für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$, sei

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2\},$$

also die Kreislinie mit Radius R um (x_0, y_0). Eine mögliche (globale!) reguläre Parametrisierung ist natürlich

$$t \mapsto (x_0, y_0) + R e^{it} =$$

$$(x_0 + R\cos t, y_0 + R \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

alternativ kann man M als Vereinigung der beiden Graphen von

$$x \mapsto y_0 + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}, \quad |x - x_0| \le R,$$

$$x \mapsto y_0 - \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}, \quad |x - x_0| \le R$$

(oberer und unterer Halbkreis) darstellen oder

M als Vereinigung "zweier Graphen über der y-Achse"

schreiben (Auflösung nach x).

d) Eine <u>Ellipse</u> mit den Halbachsen $a, b > 0$ wird gegeben durch die Gleichung

$$\circledast \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixiert. Sei o.E. $a > b$, $\varrho := \sqrt{a^2 - b^2}$. Man definiert die <u>Brennpunkte</u>

$$e_{\pm} := (x_0 \pm \varrho, y_0)$$

sowie die Abstandssumme

$$d := |(x,y) - e_+| + |(x,y) - e_-|$$

eines Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\circledast$ zu den Brennpunkten.

Ohne Einschränkung sei $(x_0, y_0) = (0,0)$. Dann gilt:

$$d = \sqrt{(x+\rho)^2+y^2} + \sqrt{(x-\rho)^2+y^2} \quad \Longrightarrow$$

$$(x+\rho)^2+y^2 = \left(d - \sqrt{(x-\rho)^2+y^2}\right)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$x^2+2\rho x+\rho^2+y^2 = d^2 - 2d\sqrt{(x-\rho)^2+y^2} + (x-\rho)^2+y^2 \quad \Longrightarrow$$

$$4\rho x = d^2 - 2d\sqrt{(x-\rho)^2+y^2} \quad \Longrightarrow$$

$$16\rho^2x^2 + d^4 - 8d^2\rho x = 4d^2\left((x-\rho)^2+y^2\right) \Longrightarrow$$

$$4d^2y^2 + \left(4d^2-16\rho^2\right)x^2 = d^4 - 4d^2\rho^2.$$

Es folgt: $\dfrac{4}{d^2-4\rho^2}\,y^2 + \dfrac{4}{d^2}\,x^2 = 1,$

und ⊛ ergibt $d = 2a$. Die Gleichung ⊛ für die Ellipse charakterisiert diese als geschlossene, ebene Kurve, <u>bei der die Abstandssumme zu zwei festen Punkten konstant ist.</u> Ähnlich wie beim Kreis kann man die Ellipse auf verschiedene Arten regulär parametrisieren, eine Möglichkeit ist die Setzung

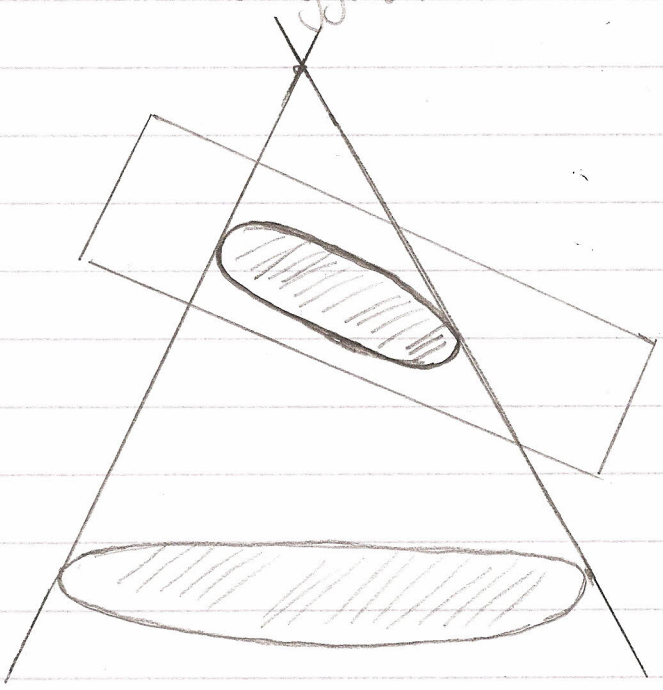
$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (a \cos t, b \sin t),$

denn dann ist mit $\alpha(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{1}{a^2} x(t)^2 + \frac{1}{b^2} y(t)^2 \equiv 1.$$

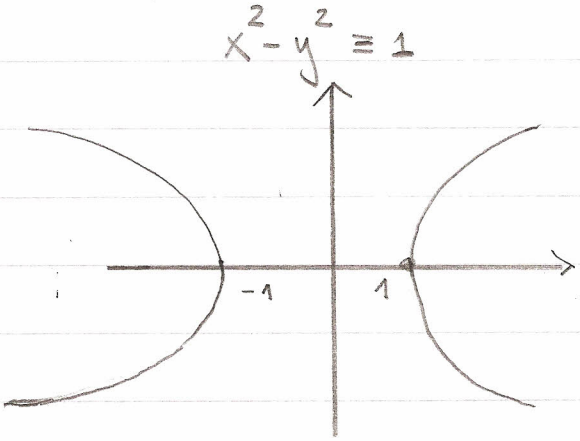
(Hier: $x_0 = y_0 = 0$)

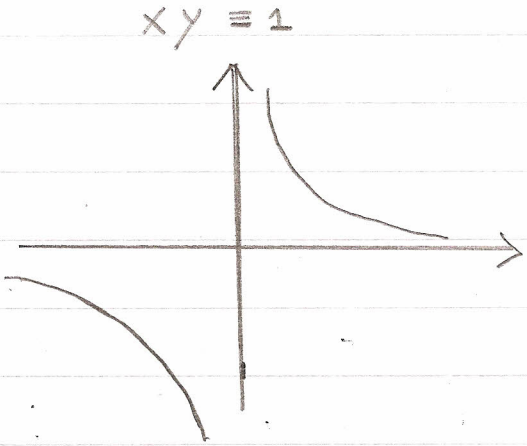
e) Die Ellipse ist ein spezieller <u>Kegelschnitt</u>, also eine durch eine quadratische Gleichung beschriebene ebene Kurve. Wie die Namensgebung sagt, entstehen die Kurven durch Schnitte eines Kreiskegels mit Ebenen, es handelt sich daher strenggenommen um Raumkurven.



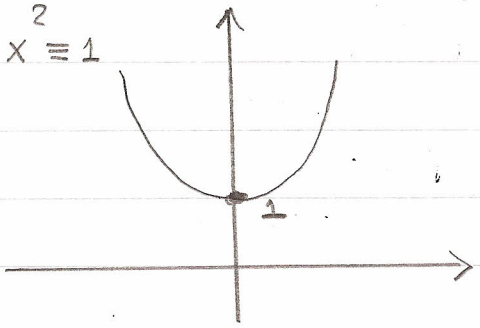
Vereinfacht dargestellt (identifiziere die Ebene mit $\mathbb{R}^2$) ergibt sich:

Hyperbeln:





Parabeln: $y - x^2 = 1$



sowie Kreis und Ellipse. Als "Grenzlagen" bekommt man Geraden und einpunktige Mengen.

< <u>Übung:</u> etwas über Kegelschnitte, z.B.: schreibe den Kegel(-mantel) als Nullstellenmenge $f(x,y,z) = 0$, wenn die Spitze in $(0,0,0)$ liegt, und der Öffnungswinkel vorgegeben ist; berechne den Schnitt mit einer Ebene $g(x,y,z) = 0$, g affin linear >

② Implizit definierte Raumkurven :

Darunter fallen bereits die Kegelschnitte, allerdings kann man hier den Standpunkt einnehmen, dass es sich nach entsprechender Transformation der Schnittebene um Kurven in $\mathbb{R}^2$ handelt.

a) Ist $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so beschreibt

$$N_f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$$

unter geeigneten Voraussetzung an f eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, z. B. erhält man mit $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ die 1-Sphäre S^2 mit Mittelpunkt $(0,0,0)$. Nimmt man noch eine weitere Funktion $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hinzu, so wird durch $N_f \cap N_g$ im günstigen Fall ein 1-dimensionales Objekt erzeugt, das unserer Vorstellung von einer Raumkurve entspricht. Allerdings wird keine globale

Parametrisierung mitgeliefert. Die Theorie (Satz über implizite Funktionen) liefert folgende Aussage:

Sei $F := (f, g): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $F(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Die Jacobi-Matrix $DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\ \nabla g(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$ habe maximalen Rang, etwa

$$\det \begin{pmatrix} \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein Intervall I um x_0 sowie differenzierbare Funktionen $\varphi, \Phi: I \to \mathbb{R}$, so dass

$$N_f \cap N_g \cap \text{Umgebung von } (x_0, y_0, z_0) = \{(t, \varphi(t), \Phi(t)) : t \in I\}.$$

Setzt man also $\alpha(t) := (t, \varphi(t), \Phi(t))$, so ist $\alpha'(t) = (1, \varphi'(t), \Phi'(t)) \neq 0$, wir haben also durch

α zumindest lokal eine reguläre Parametrisierung gefunden.

Achtung: Ist z.B.

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

so ist $\alpha(t)$ zu ersetzen durch

$$\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{\varphi}(t), t, \tilde{\Phi}(t)).$$

b) Konkret:

i) Sind in $f(x,y,z) := ax + by + cz + d$,

$g(x,y,z) := Ax + By + Cz + D$ die Vektoren

$(a,b,c), (A,B,C)$ linear unabhängig, so ist

$N_f \cap N_g$ eine Gerade in $\mathbb{R}^3$.

ii) Mit $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2$ und

$g(x,y,z) := ax + by + cz + d$ gilt: N_f ist

ein Kegel mit Spitze in $(0,0,0)$, N_g eine Ebene,

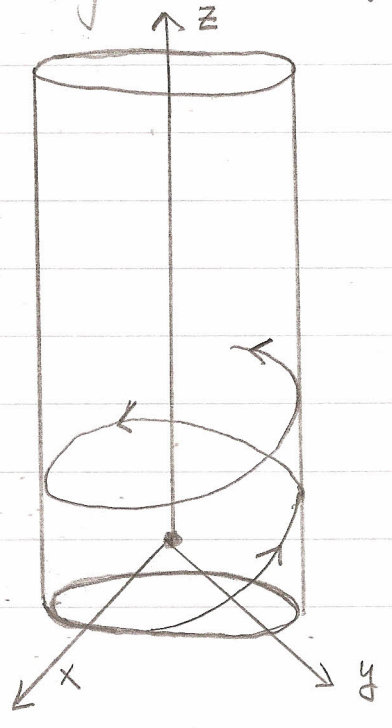
und durch passende Wahlen von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bekommt man die Kegelschnitte.

□

Zum Abschluss noch ein Beispiel für parametrisierte Raumkurven, nämlich die

Helix (Schraubenlinie):

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) := (a\cos t, a\sin t, bt)$ mit $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Die Spur dieser Kurve liegt auf dem Zylindermantel $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$ und "schraubt" sich mit Geschwindigkeit b in Richtung der z-Achse.



Es gilt:

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\neq 0.$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch <u>reguläre Kurven</u> $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$.

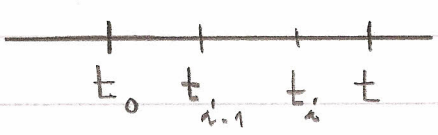
<u>Definition:</u> (<u>Bogenlänge</u>)

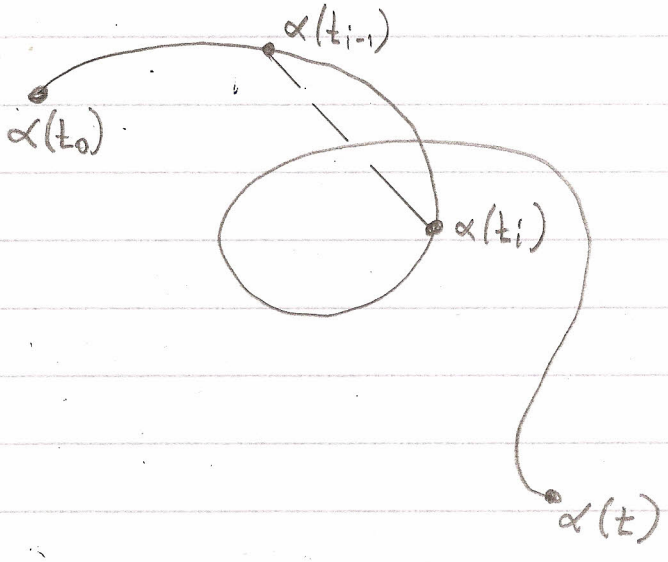
Sei $t_0 \in I$ gegeben. Dann heißt die Funktion

$$s : I \to \mathbb{R}, \quad s(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)| \, d\tau,$$

<u>die Bogenlänge von α bzgl. t_0</u>.

<u>Interpretation:</u>





Sei etwa $t_0 < t$. Man unterteilt $[t_0, t]$ in der Form $t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ mit Teilpunkten t_i und ersetzt das Kurvenstück $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ durch die Strecke von $\alpha(t_{i-1})$ nach $\alpha(t_i)$. Die "Länge

11

die Kurve $\alpha|_{[t_0,t]}$ wird dann anschaulich genähert durch

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|}{t_j - t_{j-1}} (t_j - t_{j-1}) \longrightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)| \, d\tau ,$$

wobei im Grenzübergang die Einteilung von $[t_0, t]$ immer feiner gemacht wird.

<u>Folgerung aus der Definition</u>: Wegen $|\alpha'(\tau)| > 0$ ist

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0 ,$$

d.h. die Bogenlänge ist streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion $\varphi : J \to I$, wobei $J := \text{Bild}(s) =$ Intervall in $\mathbb{R}$.

(Bemerke: für $t < t_0$ ist $s(t) < 0$,

so dass J auch negative Zahlen enthält, es sei denn, die Wahl $t_0 =$ linker Endpunkt von I ist möglich)

Damit betrachtet man die

Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge

$$\bar{\alpha} : J \to \mathbb{R}^n, \quad \bar{\alpha}(\tau) := \alpha(\varphi(\tau)).$$

Es gilt für $\tau \in J$:

$$\bar{\alpha}'(\tau) = \alpha'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau),$$

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{\rho'(\varphi(\tau))} = |\alpha'(\varphi(\tau))|^{-1},$$

d.h.:

$$\boxed{|\bar{\alpha}'| \equiv 1 \text{ auf } J.}$$

Ergebnisse:

- Man kann jede reguläre Kurve nach der Bogenlänge umparametrisieren.
- Dabei bleibt die Spur erhalten, ebenso der Durchlauf-

sinn, dann $\overline{\alpha}'(\tau) = \dfrac{\alpha'(\varphi(\tau))}{|\alpha'(\varphi(\tau))|}$.

- Das Parameterintervall ändert sich, die Durchlaufgeschwindigkeit wird auf Länge 1 normiert.

□

Bemerkung: Ist $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\psi: I \to J$ eine differenzierbare Bijektion (mit $\psi' \neq 0$) zwischen den Intervallen I und J (also ψ entweder streng fallend oder streng wachsend), dann ist allgemein $\tilde{\alpha}(\rho) := \alpha(\psi^{-1}(\rho))$, $\rho \in J$, eine Umparametrisierung von α. $\tilde{\alpha}$ ist regulär, wenn α dies ist.

Spezialfall: $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\alpha}: (-b,-a) \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\alpha}(t) := \alpha(-t)$. Hier ist $\psi^{-1}(t) = -t$ für $t \in (-b,-a)$, und $\tilde{\alpha}$ unterscheidet sich von α nur dadurch, dass die Spur jetzt rückwärts durchlaufen wird (Orientierungsumkehrung).

Anhang zu §1 : Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

Sei $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ die orientierte Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, also $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$. Wir einigen uns darauf, diese als positiv orientiert zu bezeichnen. Ist $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ eine weitere orientierte Basis in $\mathbb{R}^3$, so setzt man

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A\bar{e}_i := \bar{f}_i$$

und nennt $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ positiv (negativ) orientiert, falls $\det A > 0$ (< 0) ist. A ist die Matrix des Basiswechsels von $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ nach $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$.

Beispiel: $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) := (\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_2)$

Dann ist $A\bar{e}_1 = \bar{e}_1$, $A\bar{e}_2 = \bar{e}_3$, $A\bar{e}_3 = \bar{e}_2$; die Transformationsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\hat{=} \quad (A\bar{e}_1 \; A\bar{e}_2 \; Ae_3) \right)$$

mit $\det = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ beliebig, und tragen wir diese Vektoren als z.B. Spalten in eine Matrix ein, so ist

$$\det(u \; v \; w)$$

nach den Eigenschaften von det in jedem Argument eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wenn die beiden jeweils anderen Argumente fixiert sind. Wir betrachten

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \ni w \mapsto \det(u \; v \; w)$$

und benutzen:

Ist $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear, so gilt es genau einen Vektor $z \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(w) = w \cdot z \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$$

η stellt φ bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts

$$w \cdot z = \sum_{i=1}^{3} w_i \eta_i$$

dar. Im Fall des Funktionals Φ hängt η von u und v und wird mit $u \times v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

<u>Definition</u>: Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $u \times v$ (oder $u \wedge v$) den eindeutigen Vektor aus $\mathbb{R}^3$ mit

$$(u \times v) \cdot w = \det(u\ v\ w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

$u \times v$ heißt das <u>Vektorprodukt von u mit v</u> (Reihenfolge!).

<u>Formel für $u \times v$</u>: Es ist für

$$u = \sum_{i=1}^{3} u_i \overline{e}_i\ ,\ v = \sum_{i=1}^{3} v_i \overline{e}_i\ ,\ w = \sum_{i=1}^{3} w_i \overline{e}_i$$

$$\det(u\ v\ w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$

wenn man die 3×3 Determinante nach der letzten Spalte entwickelt. Setzt man an

$$u \times v = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 ,$$

so folgt $(u \times v) \cdot w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 ,$

und Vergleich ergibt

$$\boxed{u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \bar{e}_3} .$$

Rechenregeln für $u \times v$:

i) $u \times v = - v \times u$

ii) $(\alpha u + \beta \tilde{u}) \times v = \alpha\, u \times v + \beta\, \tilde{u} \times v$

iii) $u \times v = 0 \iff u, v$ linear abhängig

iv) $u \times v \perp u$ und $u \times v \perp v$, d.h.

$$(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0 .$$

Beweis: Man benutze $(u \times v) \cdot w = \det(u\ v\ w)$,

also $(v \times u) \cdot w = \det(v\ u\ w) = -\det(u\ v\ w)$

$= -(u \times v) \cdot w$, und da w beliebig ist, folgt i).

Für ii) beachte die Linearität von $u \mapsto \det(u\ v\ w)$.

iii) Es ist $u \times v = 0 \iff \det(u\ v\ w) = 0$

für alle $w \in \mathbb{R}^3$, und das ist äquivalent zur linearen

Abhängigkeit von u und v.

iv) klar, da z.B. $(u \times v) \cdot u = \det(u\ v\ u) = 0$. □

Bemerkungen: 1.) Seien u, v l.u. Dann gilt

$$0 < |u \times v|^2 = (u \times v) \cdot (u \times v) =$$

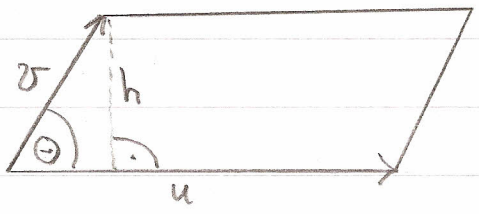
$$\det(u\ v\ u \times v),$$

mithin ist $(u, v, u \times v)$ eine positiv orientierte Basis.

2.) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ l.u. Dann erzeugen sie ein

Parallelogramm mit

Fläche $A = |u|\, h$,



$h :=$ Höhe $= |v| \sin\theta$. Hierbei ist θ der Winkel zwischen u und v, also $\cos\theta = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{v}{|v|}$. Es folgt:

$$|u \times v|^2 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \ldots = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$$

$$= |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2\theta) = A^2,$$

d.h. $|u \times v|$ ist der Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms.

3.) Sind $u, v : I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so gilt die

Produktregel

$$\frac{d}{dt}\left(u(t) \times v(t)\right) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$$

§2 Lokale Kurventheorie im $\mathbb{R}^3$

Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und betrachtet man die Funktion $t \mapsto \alpha'(t)$, so misst deren "Änderung" in der Nähe von t_0 einerseits (bezogen auf die Länge der Vektoren) eine "Änderung" der Durchlaufgeschwindigkeit und andererseits eine "Änderung" des Winkels zwischen $\alpha'(t)$ und $\alpha'(t_0)$, und nur diese Winkeländerung beschreibt die geometrische Größe, die man mit dem Begriff Krümmung verbindet. Aus diesem Grund macht es Sinn, nachfolgend alle Kurven nach der Bogenlänge zu parametrisieren ($|\alpha'| \equiv 1$), sonst müsste man (mehr oder weniger) mit $\alpha'/|\alpha'|$ rechnen, und das ist recht umständlich.

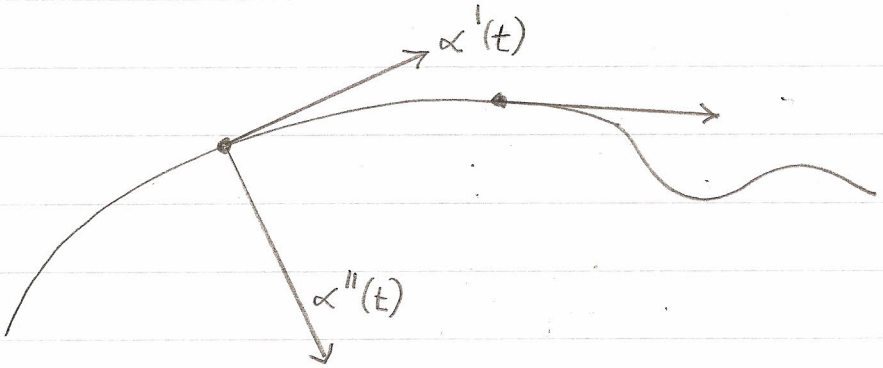
Definition: (Krümmung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach

der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Man nennt

$$\kappa(t) := |\alpha''(t)| \geq 0$$

die Krümmung von α bei $t \in I$.



Geraden sollten dadurch charakterisiert sein, dass ihre Krümmung verschwindet: Ist $\alpha(t) = tu + v$ mit $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $|u| = 1$ (Parametrisierung nach der Bogenlänge), so gilt $\alpha'' \equiv 0$, also $\kappa \equiv 0$. Ist umgekehrt $\beta: I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa \equiv 0$, so folgt $\beta'' = 0$ und nach zweimaliger Integration $\beta(t) = \eta t + \xi$ mit $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$.

Dagegen sollten Kreise konstante Krümmung $\neq 0$ haben:

Sei etwa $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (r e^{it}, 0)$, $r > 0$. Hier müssen wir zunächst nach der Bogenlänge umparametrisieren. Es ist $(t_0 := 0)$

$$\rho(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)| \, d\tau = rt$$

mit $\rho([0, 2\pi]) = [0, 2\pi r]$, so dass sich als Umparametrisierung nach der Bogenlänge ergibt:

$$\tilde{\alpha} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\alpha}(t) := \alpha(t/r).$$

Die Krümmung $\tilde{\varkappa}$ von $\tilde{\alpha}$ ist gemäß

$$\tilde{\alpha}''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\alpha'(t/r)\right) = \frac{1}{r^2}\alpha''(t/r)$$

$$= \frac{1}{r}\left(-e^{it/r}, 0\right)$$

dann gegeben durch $1/r$. Anders gesagt: Die Krümmung der Kreislinie ist umgekehrt proportional zum Radius.

Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und β die umgekehrt durchlaufene Kurve, also $\beta(\rho) :=$

$\alpha(-s)$ für $s \in J := \{-\tau : \tau \in I\}$, so gilt

$$\beta'(s) = -\alpha'(-s) \Rightarrow |\beta'| \equiv 1$$

und $\beta''(s) = \alpha''(-s)$, so dass $\varkappa_\beta(s) = \varkappa_\alpha(-s)$.

□

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

Dann ist $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) \equiv 1$, also

$$0 = \alpha'(s) \cdot \alpha''(s).$$

Schreibt man $\underline{t(s) \text{ für den Einheitstangentenvektor } \alpha'(s)}$

und definiert für $\varkappa(s) \neq 0$ den

$\underline{\text{Normalen- oder Hauptnormalenvektor}}$

$$\boxed{n(s) := \frac{t'(s)}{|t'(s)|} = \frac{\alpha''(t)}{\varkappa(s)}},$$

so gilt

$$t(s) \cdot n(s) = 0,$$

$\underline{\text{der Hauptnormalenvektor ist senkrecht zum Einheitstangenten-}}$

$\underline{\text{vektor.}}$

Definition: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. a) Punkte $s \in I$ mit $\varkappa(s) = 0$ ($\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0$) heißen singuläre Punkte der Ordnung 1.

In singulären Punkten der Ordnung 1 ist der Normalenvektor nicht definiert.

b) Ist $\varkappa(s) \neq 0$, so heißt die von $t(s)$ und $n(s)$ in $\mathbb{R}^3$ aufgespannte Ebene die Schmiegebene bei s. (engl. osculating plane)

Nachfolgend sei $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Offenbar gilt

(1) $\boxed{t'(s) = \varkappa(s) \cdot n(s)}$,

denn $t'(s) = \alpha''(s) = |\alpha''(s)| \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \varkappa(s)\, n(s)$.

Da es keine singulären Punkte der Ordnung 1 geben soll, ist

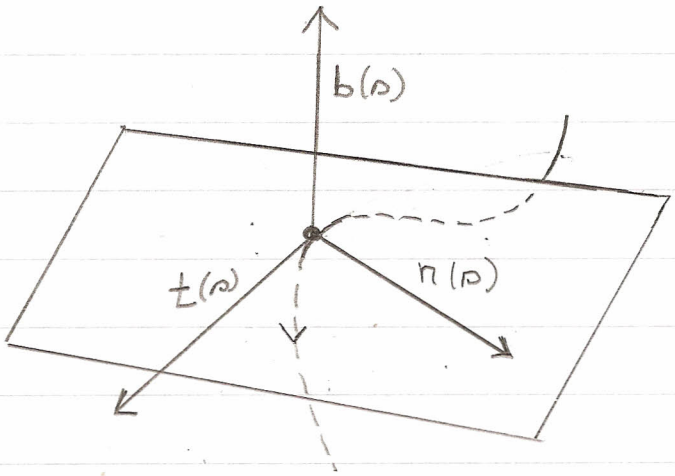
$$\boxed{b(s) := t(s) \times n(s)}$$

wohldefiniert und hat wegen

$$|t| \equiv 1 \equiv |n|, \quad t \cdot n = 0$$

Länge 1. Ferner ist $b(p)$ senkrecht zur Schmieg-

ebene.



$b(p)$ heißt <u>Binormalinvektor</u> in p.

<u>Definition</u> (<u>Frenet'schis Dreibein</u>)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

Ist $\varkappa(p) \neq 0$, so bilden die Vektoren

$t(p), n(p), b(p)$ in dieser Reihenfolge eine

<u>positiv</u> orientierte <u>Orthonormalbasis</u> von $\mathbb{R}^3$, die

das <u>Frenet'sche Dreibein</u> genannt wird.

Als Maß für die Änderung der Schmiegebene kann man die Größe $|b'(p)|$ ansehen. Was kann man über den Vektor $b'(p)$ sagen?

Es ist

$$b'(p) = \frac{d}{dp}\left(t(p) \times n(p)\right) =$$

$$t'(p) \times n(p) + t(p) \times n'(p) = \quad (1)$$

$$\kappa(p) \underbrace{n(p) \times n(p)}_{=0} + t(p) \times n'(p) =$$

$$t(p) \times n'(p) ;$$

so dass $b'(p) \perp t(p)$. Aus $|b(p)| = 1$ folgt

$$0 = \frac{d}{dp}\left(b(p) \cdot b(p)\right) = 2\, b'(p) \cdot b(p),$$

also $b'(p) \perp b(p)$. Wenn aber $b'(p)$ senkrecht ist zu $t(p)$ und $b(p)$, dann muss wegen der ONB-Eigenschaft von t, n, b der Vektor

$b'(s)$ an jeder Stelle s skalares Vielfaches von $n(s)$ sein.

Definition: Es sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\alpha''(s) \neq 0$ auf I, also $\varkappa > 0$.

Dann gibt es genau eine Funktion $\tau: I \to \mathbb{R}$ mit

$$(2) \qquad \boxed{b'(s) = \tau(s)\, n(s), \quad s \in I.}$$

$\tau(s)$ heißt die Torsion von α bei s.

Schließlich berechnen wir noch die Änderung $n'(s)$ des Normalenvektors: Mit $n = b \times t$

(beachte: $b := t \times n \implies b \times t =$

$(t \times n) \times t = (t \cdot t)\, n - (n \cdot t)\, t = n$)

gilt

$$n'(s) = \frac{d}{ds}\left(b(s) \times t(s)\right) =$$

$$b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) =$$

$$\overset{(1),(2)}{}$$

$$\tau(s)\, n(s) \times t(s) + \varkappa(s)\, b(s) \times n(s) =$$

$$-\tau(s)\, b(s) - \varkappa(s)\, t(s),$$

wobei wir $b \times n \underset{\text{Def. } b}{=} (t \times n) \times n = -t$

benutzt haben. Es folgt

$$n'(s) = -\tau(s) b(s) - \varkappa(s) t(s), \quad s \in I. \tag{3}$$

Wir fassen unsere Rechnungen (1)-(3) zusammen:

Satz (Frenet'sche Formeln)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa(s) = |\alpha''(s)| > 0$. Dann erfüllt das Frenet'sche Dreibein (t, n, b) das Differentialgleichungssystem

$$\circledast \quad \begin{aligned} t' &= \varkappa n, \\ n' &= -\varkappa t - \tau b, \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

auf dem Intervall I.

Bemerkungen: 1.) Das Frenet'sche Dreibein ist eine Funktion $(t,n,b) : I \to \mathbb{R}^9$, links in ⊛ steht die erste Ableitung dieser Funktion, rechts vom Gleichheitszeichen steht eine Funktion $I \to \mathbb{R}^9$, die sich aus Komponenten von (t,n,b) teilweise verschen mit den Gewichtsfunktionen $\varkappa$ und τ zusammensetzt.

2.) Physikalisch interpretiert kann man sich eine Raumkurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ dadurch erzeugt denken, dass man eine Gerade biegt ("Krümmung") und gleichzeitig verdreht ("Torsion"). Dies führt auf folgende Frage: Sei I ein Intervall um z.B. 0, auf dem Funktionen $\varkappa : I \to (0,\infty)$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ gegeben sind. Außerdem sei eine positiv orientierte ONB (t_0, n_0, b_0) von $\mathbb{R}^3$ fixiert. Gibt es dann eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}$ mit $(t(0), n(0), b(0)) = (t_0, n_0, b_0)$,

deren Krümmung und Torsion gerade $\varkappa$ bzw τ ist?

Wenn ja, wie steht es mit der Eindeutigkeit?

Dies führt auf den Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie, der aussagt, dass es bei Vorgabe von $\varkappa$ und τ eine im wesentlichen eindeutige Kurve gibt.

3.) Folgende Bezeichnungen sind üblich:

rektifizierende Ebene := die von t und b aufgespannte Ebene,

Normalebene := die von n und b ..... ,

Haupt- bzw. Binormale := Gerade durch $\alpha(s)$ in Richtung $n(s)$ bzw. $b(s)$,

$1/\varkappa$:= Krümmungsradius.

□

Spezialfall: Ebene Kurven und orientierte Krümmung

Wir betrachten eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \alpha(I) \subset \text{Ebene in } \mathbb{R}^3, \quad \text{o.E.}$$

$$\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

Außerdem sei $\alpha''(p) \neq 0$. Dann gilt

$$t(p) = \left(\alpha_1'(p), \alpha_2'(p), 0\right),$$

$$n(p) \underset{(1)}{=} \frac{1}{\kappa(p)} t'(p) = \frac{1}{\kappa(p)} \left(\alpha_1''(p), \alpha_2''(p), 0\right),$$

also

$$b(p) = t(p) \times n(p) =$$

$$\frac{1}{\kappa(p)} \left(0, 0, \alpha_1'(p)\alpha_2''(p) - \alpha_2'(p)\alpha_1''(p)\right).$$

Per Definition wird die Schmiegebene von $t(p)$ und $n(p)$ aufgespannt, die Formeln für t und n liefern:

$$\text{Schmiegebene in } p = \mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

d.h. $b \equiv (0,0,1)$ oder $\equiv (0,0,-1)$,

dann b steht auf der Schmiegebene senkrecht mit Länge 1.

Die Konstanz von b bedeutet aber $\tau \equiv 0$.

Sei umgekehrt $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $\tau \equiv 0$. ($\kappa > 0$, aber.) Dann ist $b'(s) \underset{(2)}{=} 0$,

also $b \equiv b_0$ für einen (konstanten) Einheitsvektor b_0.

Es folgt:

$$\frac{d}{ds}\left(\beta(s) \cdot b_0\right) = \beta'(s) \cdot b_0 = t(s) \cdot b(s) \equiv 0,$$

d.h. $\beta(I)$ liegt in einer Ebene $\perp b_0$.

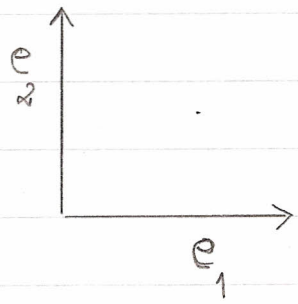
Damit ist gezeigt

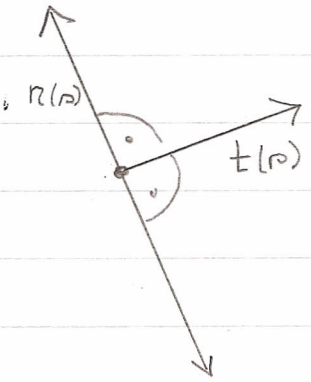
Satz: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Dann gilt:

Torsion $\tau \equiv 0$ $\Longleftrightarrow$
Spur α $\subset$ Ebene in $\mathbb{R}^3$

Beschränkt man sich also direkt auf ebene Kurven, so ist die Torsion keine geometrisch relevante Größe, dafür kann man den Krümmungsbegriff verfeinern: Sei

$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa(s) = |\alpha''(s)| > 0$. Sei (e_1, e_2) die positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^2$.





In $\mathbb{R}^2$ kann der Einheitstangentenvektor $t(s)$ eindeutig durch einen Vektor $\tilde{n}(s)$ zu einer <u>positiven</u> ONB $(t(s), \tilde{n}(s))$ ergänzt werden. Man nennt $\tilde{n}(s)$ den Hauptnormalenvektor der ebenen Kurve α und hat wegen $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$, also

$$t(s) \cdot t'(s) = 0,$$

offensichtlich die Beziehung

$$t'(s) = \tilde{\kappa}(s)\, n(s)$$

mit einer Funktion $\tilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$.

Definition: Mit obigen Notationen heißt $\tilde{\kappa}$ die orientierte Krümmung der ebenen Kurve α.

Eigenschaften: 1.) $|\tilde{\kappa}(s)| = \kappa(s)$.

2.) Im Unterschied zu κ ändert $\tilde{\kappa}$ beim Rückwärtsdurchlaufen das Vorzeichen. ⟨Übung⟩ □

Diskussion der geometrischen Größen für allgemeine (reguläre) Raumkurven: Formeln für $\kappa_\alpha, \tau_\alpha$

Sei jetzt $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve, also $|\alpha'(t)| > 0$ überall, die nicht notwendig nach der Bogen-

länge_parametrisiert. Um Krümmung, Torsion, etc., von α erklären zu können, müssen wir α nach der Bogenlänge parametrisieren. Dies ist nicht eindeutig (Wahl des Fußpunktes!), so dass wir nur dann sinnvoll unsere Begriffe übertragen können, wenn die Ergebnisse nicht von der Umparametrisierung abhängen. Das wird aber das Ergebnis der folgenden Rechnung sein.

Notation: $s = s(u)$ Bogenlänge, $u \in I$;

$J :=$ Bild der Bogenlängenfunktion $= s(I)$;

$u = u(s)$ Umkehrfunktion der Bogenlänge $J \to I$;

$\beta : J \to \mathbb{R}^3$, $\beta(s) := \alpha(u(s))$, Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge $\Longrightarrow$

$$(1) \quad u'(s) = |\alpha'(u(s))|^{-1},$$

$$(2) \quad u''(s) \underset{(1)}{=} -|\alpha'(u(s))|^{-2} \frac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} \cdot \alpha''(u(s))\, u'(s)$$

$$= -|\alpha'(u(\rho))|^{-4} \quad \alpha''(u(\rho)) \cdot \alpha'(u(\rho)) .$$

Es gilt

$$\beta'(\rho) = \alpha'(u(\rho))\, u'(\rho) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}(u(\rho)),$$

und für die Krümmung hat man per Definition

$$\varkappa_\beta(\rho) = |\beta''(\rho)|,$$

so dass $\beta''(\rho)$ auszurechnen ist:

$$\beta''(\rho) = \frac{d}{d\rho}\left(\alpha'(u(\rho))\, u'(\rho)\right) =$$

$$\alpha''(u(\rho))\,(u'(\rho))^2 + \alpha'(u(\rho))\, u''(\rho) \underset{(1),(2)}{=}$$

$$\frac{\alpha''(u(\rho))}{|\alpha'(u(\rho))|^2} - \frac{\alpha''(u(\rho))\cdot\alpha'(u(\rho))}{|\alpha'(u(\rho))|^4}\,\alpha'(u(\rho)) .$$

Das ergibt

$$|\varkappa_\beta(\rho)|^2 = \beta''(\rho)\cdot\beta''(\rho) =$$

$$\frac{|\alpha''(u(\rho))|^2}{|\alpha'(u(\rho))|^4} - 2\,\frac{\left(\alpha'(u(\rho))\cdot\alpha''(u(\rho))\right)^2}{|\alpha'(u(\rho))|^6} + \frac{\left(\alpha''(u(\rho))\cdot\alpha'(u(\rho))\right)^2}{|\alpha'(u(\rho))|^6} =$$

$$|\alpha'(u(\rho))|^{-6}\left[|\alpha'(u(\rho))|^2\,|\alpha''(u(\rho))|^2-(\alpha'(u(\rho))\cdot\alpha''(u(\rho)))^2\right]=$$

$$|\alpha'(u(\rho))|^{-6}\;|\alpha'(u(\rho))\times\alpha''(u(\rho))|^2,$$

also

$$(3)\qquad \varkappa_\beta(\rho)=|\alpha'(u(\rho))|^{-3}\;|\alpha'(u(\rho))\times\alpha''(u(\rho))|.$$

Definiert man daher die Krümmung von α als

$$\boxed{\varkappa_\alpha : I\to\mathbb{R},\quad \varkappa_\alpha(u):=|\alpha'(u)|^{-3}\;|\alpha'(u)\times\alpha''(u)|},$$

so ist $\varkappa_\alpha(u)$ die Krümmung, $\varkappa_\beta(\rho(u))$ die Umparametrisierung nach der Bogenlänge an der Stelle $\rho(u)\in J$.

(Ist α bereits nach der Bogenlänge parametrisiert, so hat man eine Formel für die bekannte Krümmung!)

Für die Torsion τ_β gilt wegen $b'_\beta(\rho)=\tau(\rho)\,n_\beta(\rho)$:

$$\tau_\beta(\rho)=b'_\beta(\rho)\cdot n_\beta(\rho)$$

mit $b_\beta(\rho)=t_\beta(\rho)\times n_\beta(\rho)$, $n_\beta(\rho):=\dfrac{t'_\beta(\rho)}{|t'_\beta(\rho)|}$

und $t_\beta(\rho)=\beta'(\rho)$. Wir berechnen zunächst

$$b'_\beta(\rho)=\frac{d}{d\rho}\left(t_\beta(\rho)\times n_\beta(\rho)\right)=$$

$$t_\beta'(\rho) \times n_\beta(\rho) + t_\beta(\rho) \times n_\beta'(\rho) = \text{(Frenet'sche Formel)}$$

$$\varkappa(\rho)\,(n_\beta(\rho) \times n_\beta(\rho)) + t_\beta(\rho) \times n_\beta'(\rho) = t_\beta(\rho) \times n_\beta'(\rho).$$

Damit folgt:

$$\tau_\beta(\rho) = \left(t_\beta(\rho) \times n_\beta'(\rho)\right) \cdot n_\beta(\rho) =$$

$$\det\left(t_\beta(\rho), n_\beta'(\rho), n_\beta(\rho)\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{benutze } n_\beta = \frac{1}{\varkappa_\beta} t_\beta', \\ 1^{\text{te}} \text{ Frenet'sche Formel} \\ \text{und } t_\beta = \beta'\end{array}\right\}$$

$$\det\left(\beta'(\rho), \left(\frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} t_\beta'(\rho)\right)', \frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} t_\beta'(\rho)\right) =$$

$$\det\left(\beta'(\rho), \left(\frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} \beta''(\rho)\right)', \frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} \beta''(\rho)\right) =$$

$$\underbrace{\det\left(\beta'(\rho), \left(\frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)}\right)' \beta''(\rho), \frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} \beta''(\rho)\right)}_{= 0, \text{ da Spalte } 2 + 3 \text{ l. a.}} +$$

$$\det\left(\beta'(\rho), \frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} \beta'''(\rho), \frac{1}{\varkappa_\beta(\rho)} \beta''(\rho)\right) \Longrightarrow$$

$$\tau_\beta(\rho) = \varkappa_\beta(\rho)^{-2} \det\left(\beta'(\rho), \beta'''(\rho), \beta''(\rho)\right).$$

Nun benutzt man noch $\beta'(\rho) = \dfrac{\alpha'(u(\rho))}{|\alpha'(u(\rho))|}$, berechnet

damit β'', β''', um zu sehen:

$$\tau_\beta(\rho) = \varkappa_\beta(\rho)^{-2} \, |\alpha'(u(\rho))|^{-6}$$
$$\cdot \det\left(\alpha'(u(\rho)), \alpha'''(u(\rho)), \alpha''(u(\rho))\right)$$
$$= -|\alpha'(u(\rho)) \times \alpha''(u(\rho))|^{-2}$$
$$\overset{(3)}{\cdot} \left(\alpha'(u(\rho)) \times \alpha''(u(\rho))\right) \cdot \alpha'''(u(\rho)).$$

Damit definiert man die <u>Torsion</u> $\tau_\alpha : I \to \mathbb{R}$ <u>von α</u> durch

$$\boxed{\tau_\alpha(u) = -\frac{\alpha'(u) \times \alpha''(u)}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|^2} \cdot \alpha'''(u)}$$

$\tau_\alpha(u)$ entspricht der Torsion $\tau_\beta(\rho(u))$ der nach der Bogenlänge umparametrisierten Kurve $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ in $\rho(u)$.

<u>Ist α selbst nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist eine Formel für die Torsion abgeleitet.</u>

<u>Anmerkungen</u>: 1.) Die Formeln für $\varkappa_\alpha$ und τ_α zeigen, warum es günstiger ist, mit nach der Bogenlänge para-

mitnsierten Kurven zu arbeiten.

2.) <Übung> Im Spezialfall einer regulären, ebenen Kurve $\alpha(u) := (x(u), y(u))$ bekommt man mit analogen kanonische Rechnungen als Definition für die orientierte Krümmung

$$\tilde{\kappa}_\alpha(u) = \left(x'(u)^2 + y'(u)^2 \right)^{-3/2} \left[x'(u) y''(u) - x''(u) y'(u) \right],$$

d.h. $\tilde{\kappa}_\alpha(u)$ ist die orientierte Krümmung $\tilde{\kappa}_\beta(s(u))$ der Umparametrisierung β von α nach der Bogenlänge s.

Im Falle einer ebenen Graphenkurve

$$\alpha(u) = (u, f(u)), \quad u \in I,$$

über der x-Achse mit $f: I \to \mathbb{R}$ heißt das:

$$\tilde{\kappa}_\alpha(u) = f''(u) \left(1 + f'(u)^2 \right)^{-3/2}.$$

Bevor wir den Hauptsatz der lokalen Kurventheorie diskutieren, widmen wir uns der

geometrischen Interpretation von Krümmung, Torsion, etc. :

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(s) > 0$. Sei $s_0 \in I$, o.E. $s_0 = 0$. Nach Taylor gilt

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\,\alpha'(0) + \frac{1}{2} s^2 \alpha''(0) + \frac{1}{6} s^3 \alpha'''(0) + R(s)$$

mit $\lim_{s \to 0} s^{-3} R(s) = 0$ für das Restglied $R(s)$.

Um diese Entwicklung vornehmen zu können, reicht die Information $\alpha \in C^4(I, \mathbb{R}^3)$. Wir haben

$$\alpha'(0) = t(0), \quad \alpha''(0) = \kappa(0)\, n(0)$$

sowie

$$\alpha'''(s) = t''(s) \overset{\text{Frenet'sche Formel für } t'}{=} (\kappa(s)\, n(s))' =$$

$$\kappa'(s)\, n(s) + \kappa(s)\, n'(s) \overset{\text{Frenet'sche Formel für } n'}{=}$$

$$\varkappa'(\rho)\, n(\rho) - \varkappa^2(\rho)\, t(\rho) - \varkappa(\rho)\tau(\rho)\, b(\rho),$$

und mit den Abkürzungen

$$t = t(0),\quad n = n(0),\quad b = b(0),\quad \varkappa = \varkappa(0),\quad \tau = \tau(0)$$

folgt:

$$\alpha(\rho) - \alpha(0) = \left(\rho - \frac{\varkappa^2 \rho^3}{6}\right) t + \left(\frac{\varkappa \rho^2}{2} + \frac{\varkappa' \rho^3}{6}\right) n - \frac{\varkappa\tau\rho^3}{6} b + R(\rho).$$

Nach Translation und Drehung kann man erreichen

$$\alpha(0) = 0\ ,\quad (t, n, b) = (e_1, e_2, e_3).$$

Schreibt man noch $\alpha(\rho) = (x(\rho), y(\rho), z(\rho))$ und $R = (R_x, R_y, R_z)$, so ergibt sich die

<u>lokale Normalform</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} x(\rho) &= \rho - \tfrac{1}{6}\varkappa^2\rho^3 + R_x(\rho), \\ y(\rho) &= \tfrac{1}{2}\varkappa\rho^2 + \tfrac{1}{6}\varkappa'\rho^3 + R_y(\rho), \\ z(\rho) &= -\tfrac{1}{6}\varkappa\tau\rho^3 + R_z(\rho). \end{aligned}}$$

Natürlich ist diese lokale Normalform gemäß Herleitung nur gültig in einer Umgebung von $\rho_0 = 0$. Für $|\rho| \ll 1$ dominieren die Potenzen der jeweils niedrigsten Ordnung, d.h.:

Die Projektion von $\alpha(\rho)$ in die

$\underbrace{(x,y)\text{-Ebene}}_{\text{Schmiegebene}}$ ($\hat{=}$ Anteil $(x(\rho), y(\rho))$) ist die Kurve

$$\rho \mapsto \left(\rho, \tfrac{1}{2}\varkappa\rho^2\right),$$

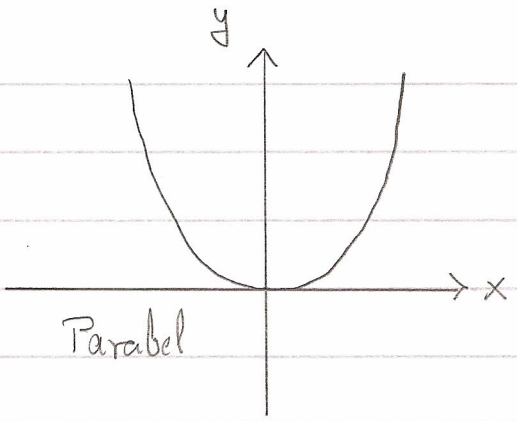
$\underbrace{(x,z)\text{-Ebene}}_{\text{rektifizierende Ebene}}$ ($\hat{=}$ Anteil $(x(\rho), z(\rho))$) -"-

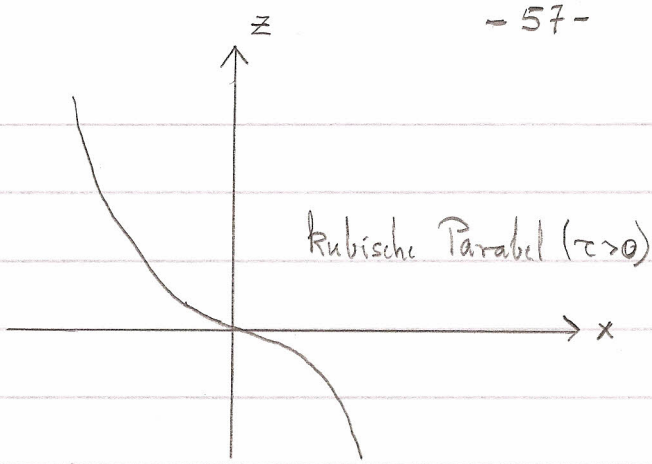
$$\rho \mapsto \left(\rho, -\tfrac{1}{6}\varkappa\tau\rho^3\right),$$

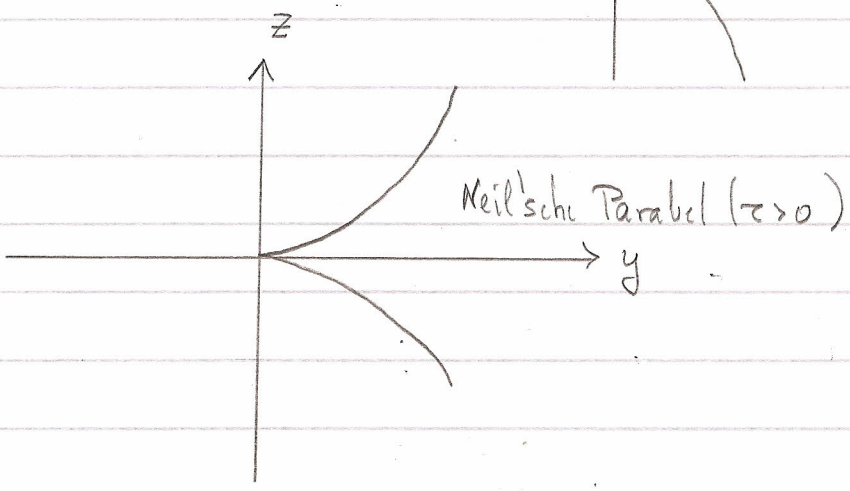
$\underbrace{(y,z)\text{-Ebene}}_{\text{Normalebene}}$ ($\hat{=}$ Anteil $(y(\rho), z(\rho))$) -"-

$$\rho \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\varkappa\rho^2, -\tfrac{1}{6}\varkappa\tau\rho^3\right),$$

wobei wir nach obiger Bemerkung die niedrigsten Potenzen übertragen haben. Es ergeben sich folgende Bilder für die Projektionen von $\alpha(\rho)$ lokal bei 0:







<u>Beispiel:</u> Sei $\alpha : [-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(\rho) := \left(R \cos\frac{s}{c}, R \sin\frac{\rho}{c}, h\frac{\rho}{c}\right)$$

mit gegebenen Parametern $h > 0$, $R > 0$ sowie $c := \sqrt{h^2 + R^2}$.

Es handelt sich um die auf Normalform parametrisierte Helix,

denn $\alpha'(\rho) = \left(-\frac{R}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{R}{c}\cos\frac{\rho}{c}, \frac{h}{c}\right)$ und

$$|\alpha'(\rho)| = \left(\frac{R^2}{c^2} + \frac{h^2}{c^2}\right)^{1/2} \equiv 1.$$ Es gilt

$$t(\rho) = \frac{1}{c}\left(-R\sin\frac{\rho}{c}, R\cos\frac{\rho}{c}, \frac{h}{c}\right),$$

$$t'(\rho) = -\frac{R}{c^2}\left(\cos\frac{\rho}{c}, \sin\frac{\rho}{c}, 0\right),$$

und damit folgt $\left(\varkappa(\rho) = |\alpha''(\rho)| = |t'(\rho)| \right)$

$$\varkappa(\rho) = R/c^2$$

sowie $n(\rho) = \frac{1}{\varkappa(\rho)}\, t'(\rho) = -\left(\cos\frac{\rho}{c}, \sin\frac{\rho}{c}, 0\right)$.

Weiter ist

$$b(\rho) = t(\rho) \times n(\rho) =$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{R}{c}\sin\frac{\rho}{c} & \frac{R}{c}\cos\frac{\rho}{c} & \frac{h}{c} \\ -\cos\frac{\rho}{c} & -\sin\frac{\rho}{c} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{h}{c}\sin\frac{\rho}{c}\,,\; -\frac{h}{c}\cos\frac{\rho}{c}\,,\; \frac{R}{c} \right),$$

und gemäß $b'(\rho) = \tau(\rho)\, n(\rho)$ folgt für die Torsion

$$\tau(\rho) = -h/c^2.$$

< Übung: weitere Beispiele >

Wie nach den Frenet'schen Formeln angemerkt wurde, legen diese nahe, dass Raumkurven alleine durch Vorgabe von Krümmung und Torsion festgelegt sind bzw. konstruiert werden können. Dies wird präzisiert durch

Theorem (Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie)

Sei $I := [\rho_0, \rho_1]$ ein Intervall mit $\rho_0 < \rho_1$. Gegeben seien differenzierbare Funktionen $\varkappa : I \to (0, \infty)$ und $\tau : I \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ mit $\varkappa_\alpha$ (:= Krümmung von α) $= \varkappa$ und τ_α (:= Torsion von α) $= \tau$.

a) Ist $\alpha_0 \in \mathbb{R}^3$ gegeben, und hat man dazu eine positiv orientierte ONB (t_0, n_0, b_0) von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ fixiert, so gibt es

genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ, welche die Anfangsbedingung

$$\circledast \quad \alpha(p_0) = \alpha_0,\ t(p_0) = t_0,\ n(p_0) = n_0,\ b(p_0) = b_0$$

erfüllt.

b) Verzichtet man auf $\circledast$, und sind α, β nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$, $\varkappa_\alpha = \varkappa_\beta = \varkappa$, so folgt $\beta = S(\alpha) + c$ für eine orthogonale Matrix S und einen konstanten Vektor $c \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung: b) besagt, dass Vorgabe von Krümmung und Torsion die Kurve bis auf eine starre Bewegung (= Translation + orthog. Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) eindeutig bestimmt.

Der Beweis des Theorems benutzt folgende Aussage über

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

Folgerung aus dem
Satz von Picard - Lindelöf:

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $F: [a,b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ und linear in $y \in \mathbb{R}^n$, d.h. $y \mapsto F(p,y)$ ist für jedes $p \in [a,b]$ linear. Dann gibt es zu jeder Vorgabe von $y_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $y: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, des Anfangswertproblems

$$y'(p) = F(p, y(p)), \quad p \in I, \quad y(a) = y_0.$$

Es handelt sich bei obiger Feststellung um eine Kombination des bekannten lokalen Existenzsatzes von Picard - Lindelöf mit einer Abschätzung über die Größenordnung des Existenzintervalls, die für lineare Systeme (mit stetigen Koeffizienten) zur globalen Existenz der Lösung auf ganz $[a,b]$ führt. (Kaballo, Analysis II, 36.1 Satz).

Beweis des Theorems: Mit etwas unüblicher Notation schreiben wir $\xi = (t\ n\ b)$, $t = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $n = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$, $b = (\xi_7, \xi_8, \xi_9)$ für die Variable $\xi \in \mathbb{R}^9$. Sodann betrachten wir auf I das Differentialgleichungssystem

$$(1) \qquad \xi'(\rho) = F(\rho, \xi(\rho))$$

mit $$F(\rho, t, n, b) = (\varkappa(\rho) n, -\tau(\rho) b - \varkappa(\rho) t, \tau(\rho) n).$$

Offenbar ist $F(\rho, \cdot)$ linear in der $\mathbb{R}^9$-Variablen, und (1) ist offenbar genau dann erfüllt, wenn die Komponenten $t(\rho)$, $n(\rho)$, $b(\rho)$ von $\xi(\rho)$ dem System

$$(2) \qquad \begin{cases} t'(\rho) = \varkappa(\rho)\, n(\rho), \\ n'(\rho) = -\tau(\rho) b(\rho) - \varkappa(\rho)\, t(\rho), \\ b'(\rho) = \tau(\rho)\, n(\rho) \end{cases}$$

der Frenet'schen Differentialgleichungen genügen. Sei $\xi_0 = (t_0, n_0, b_0)$ eine positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^3$.

Dann gibt es genau eine Lösung $\xi(s) = (t(s), n(s), b(s))$ von (1) bzw. (2) mit

(3) $\xi(s_0) = \xi_0$.

Wir zeigen: <u>$\xi(s)$ bleibt für alle s orthonormal</u>, d.h. die Vektoren $t(s), n(s), b(s)$ bilden eine positiv orientierte ONB. Es ist nach (2)

$$(t \cdot n)' = t' \cdot n + t \cdot n' = \varkappa (n \cdot n) - \varkappa (t \cdot t) - \tau (t \cdot b),$$

$$(t \cdot b)' = t' \cdot b + t \cdot b' = \varkappa (n \cdot b) + \tau (t \cdot b),$$

$$(n \cdot b)' = n' \cdot b + b' \cdot n = -\varkappa (t \cdot b) - \tau (b \cdot b) + \tau (n \cdot n),$$

$$(t \cdot t)' = 2 t' \cdot t = 2 \varkappa (n \cdot t),$$

$$(n \cdot n)' = 2 n' \cdot n = -2 \varkappa (n \cdot t) - 2 \tau (n \cdot b),$$

$$(b \cdot b)' = 2 b' \cdot b = 2 \tau (b \cdot n),$$

und hier treten links die Ableitungen von 6 skalaren Funktionen $(__)'$ auf. Auf den rechten Seiten stehen lineare Kombinationen der Funktione $(\ldots)$ mit variablen Koeffizienten, es handelt sich also um ein lineares System für $\gamma : I \to \mathbb{R}^6$, wobei $\gamma_1 = t \cdot n, \ldots, \gamma_6 = b \cdot b$. Der Anfangswert ist

$$\gamma(p_0) = (0, 0, 0, 1; 1, 1).$$

Da das System

$$\rho_1' = \varkappa \rho_5 - \varkappa \rho_4 - \tau \rho_2,$$

$$\rho_2' = \varkappa \rho_3 + \tau \rho_2,$$

$$\rho_3' = -\varkappa \rho_2 - \tau \rho_6 + \tau \rho_5,$$

$$\rho_4' = 2\varkappa \rho_1,$$

$$\rho_5' = -2\varkappa \rho_1 - 2\tau \rho_3,$$

$$\rho_6' = 2\tau \rho_3$$

aber auch von $\rho \equiv (0,0,0,1,1,1)$ gelöst wird, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung zum Anfangswert $(0,0,0,1,1,1)$:

$$t \cdot n = t \cdot b = n \cdot b = 0, \quad |t| = |n| = |b| = 1.$$

$(t(\rho), n(\rho), b(\rho))$ bleibt dann auch für alle Zeiten positiv orientiert, denn $\det(t_0, n_0, b_0) = 1$. Da $\rho \mapsto \det(t(\rho), n(\rho), b(\rho))$ stetig ist und nur die Werte ± 1 haben kann, folgt aber notwendig

$$\det(t(\rho)\ n(\rho)\ b(\rho)) = 1 \quad \forall \rho \in I.$$

Nun definieren wir die Kurve $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(\rho) := \int_{\rho_0}^{\rho} t(\tilde{\rho})\, d\tilde{\rho}.$$

Offenbar ist $|\alpha'(\rho)| = |t(\rho)| = 1$, so dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir müssen zeigen:

$$\varkappa_\alpha \ (:= \text{Krümmung von } \alpha) \ = \varkappa,$$

$$\tau_\alpha \ (:= \text{Torsion von } \alpha) \ = \tau.$$

Dazu greifen wir wieder auf die Differentialgleichungen (2) zurück:

Es gilt nach Definition von α:

$$\alpha'(s) = t(s) \Longrightarrow \alpha''(s) = t'(s) \underset{(2)_1}{=} \varkappa(s)\, n(s),$$

und per Definition der Krümmung: $\varkappa_\alpha(s) = |\alpha''(s)|$,

also $\varkappa_\alpha(s) = |\varkappa(s)\, n(s)| = \varkappa(s)$, da nach Voraussetzung $\varkappa > 0$ und nach Konstruktion $|n| \equiv 1$.

Für die Torsion τ_α gilt die Formel

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{(\alpha'(s) \times \alpha''(s))}{|\alpha'(s) \times \alpha''(s)|^2} \cdot \alpha'''(s),$$

denn unsere Kurve ist ja nach der Bogenlänge parametrisiert.

Es ist $\alpha''' = t'' = (t')' \underset{(2)_1}{=} (\varkappa n)'$

$$= \kappa' n + \kappa n' \underset{(2)_2}{=} \kappa' n - \kappa^2 t - \kappa \tau b ,$$

und Einsetzen ergibt:

$$\tau_\alpha = - \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \circ \alpha \overset{(2)_1}{=}$$

$$- \frac{t \times \kappa n}{|t \times \kappa n|^2} \cdot (\kappa' n - \kappa^2 t - \kappa \tau b) =$$

$$\kappa \tau \frac{t \times \kappa n}{|t \times \kappa n|^2} \cdot b = \tau \frac{(t \times n) \cdot b}{|t \times n|^2} = \tau .$$

Setzt man jetzt $\tilde{\alpha}(\rho) := \alpha_0 + \alpha(\rho)$, so ist gezeigt: Die Kurve $\tilde{\alpha}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa_{\tilde{\alpha}} = \kappa$, $\tau_{\tilde{\alpha}} = \tau$ und den Anfangsbedingungen

$$\circledast \quad \begin{cases} t_{\tilde{\alpha}}(\rho_0) = t_0, \; n_{\tilde{\alpha}}(\rho_0) = n_0, \; b_{\tilde{\alpha}}(\rho_0) = b_0, \\ \tilde{\alpha}(\rho_0) = \alpha_0, \end{cases}$$

insbesondere haben wir die Existenz von Kurven mit

Krümmung $= \varkappa$ und Torsion $= \tau$ beweisen einschließlich der Existenzaussage aus a). Sei jetzt $\tilde{\beta}: I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa_{\tilde{\beta}} = \varkappa$ und $\tau_{\tilde{\beta}} = \tau$ sowie der Anfangsbedingung $\circledast$. Dann erfüllen $t_{\tilde{\beta}}$, $n_{\tilde{\beta}}$, $b_{\tilde{\beta}}$ die Frenet'schen Formeln, d.h. $(t_{\tilde{\beta}}, n_{\tilde{\beta}}, b_{\tilde{\beta}})$ löst (2), und da die Anfangswerte fixiert sind, folgt wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu (2) sofort

$$t_{\tilde{\beta}} = t_{\tilde{\alpha}}, \quad n_{\tilde{\beta}} = n_{\tilde{\alpha}}, \quad b_{\tilde{\beta}} = b_{\tilde{\alpha}}.$$

Gemäß $\frac{d}{ds}\tilde{\beta}(s) = t_{\tilde{\beta}}(s)$ gilt

$$\frac{d}{ds}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})(s) \equiv 0,$$

was wegen $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha_0 = \tilde{\beta}(s_0)$ dann insgesamt $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ ergibt, womit a) des Theorems ganz bewiesen ist.

Wir kommen zur Aussage b): Seien $\alpha, \beta: I \to \mathbb{R}^3$

nach die Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung $= \varkappa$ und Torsion $= \tau$. Wir betrachten die orthogonale Transformation $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$t_\beta(p_0) = S(t_\alpha(p_0)), \quad n_\beta(p_0) = S(n_\alpha(p_0)),$$
$$b_\beta(p_0) = S(b_\alpha(p_0)).$$

Die Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma := S(\alpha)$, ist nach der Bogenlänge parametrisiert mit (p.o.)

$$t_\gamma(p_0) = t_\beta(p_0), \quad n_\gamma(p_0) = n_\beta(p_0), \quad b_\gamma(p_0) = b_\beta(p_0),$$

und da $(t_\beta, n_\beta, b_\beta)$, $(t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma)$ (2) erfüllen müssen (Frenet'sche Formeln unter Beachtung von $\varkappa_\gamma = \varkappa$, $\tau_\gamma = \tau$), folgt $(t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma) = (t_\beta, n_\beta, b_\beta)$ auf I, speziell

$$\frac{d}{dp}\left(\gamma(p) - \beta(p)\right) = t_\gamma(p) - t_\beta(p) = 0,$$

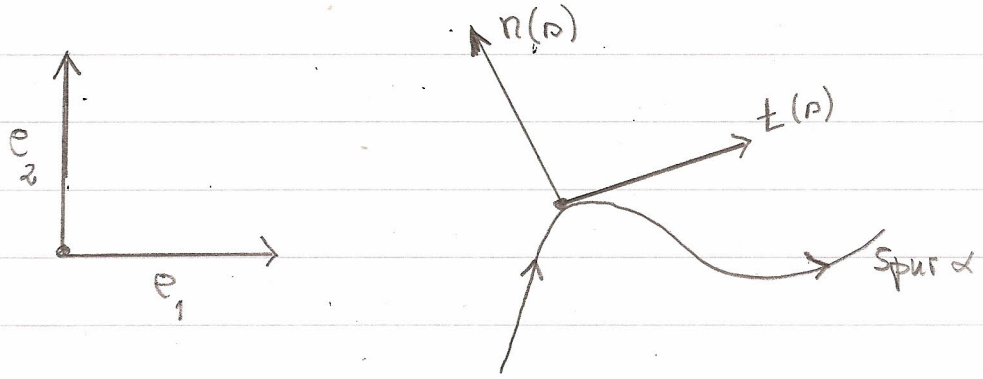
m.a.W.: $\beta(p) = S(\alpha(p)) + c$, $p \in I$,

für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$.

□

§3 Globale Eigenschaften ebener Kurven

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Kurven mit Spur in $\mathbb{R}^2$, die wie immer nach der Bogenlänge parametrisiert sein sollen. Wir legen hier den Begriff der orientierten Krümmung zugrunde (Symbol $\varkappa$), die wie folgt definiert ist (vgl. §2): Es sei



$n(p) :=$ der 1-Vektor $\perp t(p)$, so dass $(t(p), n(p))$ gleich orientiert zu (e_1, e_2).
(Hauptnormalenvektor)

Wegen $0 = \frac{d}{dp}(t \cdot t)$ ist $t' \perp t$, d.h.

es gilt mit $\varkappa(p) \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$t'(p) = \varkappa(p)\, n(p).$$

Definition: a) Eine (reguläre) Kurve $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt geschlossen, wenn gilt $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Die geschlossene Kurve heißt einfach geschlossen, wenn $\alpha|_{[a,b)}$ injektiv ist.

Bemerkungen: 1.) Da wir mit C^∞-Kurven arbeiten, ist a) die in diesem Kontext passende Version von Geschlossenheit und nicht wie bei nur stetigen Kurven die Bedingung $\alpha(a) = \alpha(b)$. Beschränkt man sich auf C^m-Kurven, so hätte man entsprechend zu fordern $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b) \quad \forall\, k \leq m$.

2.) Die Kreislinie $\alpha: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ ist z.B. geschlossen und auch einfach geschlossen.

3.) Man überlegt sich leicht: $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist geschlossen genau dann, wenn es eine (reguläre) Kurve

$\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $\tilde{\alpha}|_{[a,b]} = \alpha$ und

$\tilde{\alpha}(t + (b-a)) = \tilde{\alpha}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\tilde{\alpha}$ ist

periodisch mit Periode $b-a$. □

Wir beginnen mit einigen einfachen Aussagen globaler Natur

<u>Satz:</u> Sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametri-

siert. a) Ist $\varkappa_\alpha \equiv 0$, so ist Spur α in einer

Geraden enthalten. b) Ist die orientierte Krümmung

$\varkappa_\alpha$ konstant $\neq 0$, so gilt Spur $\alpha \subset$ Kreislinie.

Der Beweis von a) ist trivial, da dann $t'_\alpha(s) =$

$\varkappa_\alpha(s)\, n_\alpha(s) = 0$, also $\alpha''(s) \equiv 0$, d.h. α

ist affin linear. Für b) holen wir etwas weiter aus:

Sei $D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Abbildung

"Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn".

Dann gilt nach Wahl von $n_\alpha(p)$:

$$n_\alpha(p) = D\left(t_\alpha(p)\right),$$

also:

$$n_\alpha'(p) = D\left(t_\alpha'(p)\right) = D\left(\varkappa_\alpha(p)\, n_\alpha(p)\right)$$

$$= \varkappa_\alpha(p)\, D\left(n_\alpha(p)\right) = \varkappa_\alpha(p)\left(D \circ D\right)\left(t_\alpha(p)\right)$$

$$= -\varkappa_\alpha(p)\, t_\alpha(p).$$

Also bekommen wir folgende Version der

<u>Frenet'schen Formeln für ebene Kurven:</u>

$$t_\alpha' = \varkappa_\alpha\, n_\alpha\,, \quad n_\alpha' = -\varkappa_\alpha\, t_\alpha\,.$$

Es handelt sich um ein lineares System für (t_α, n_α) mit stetigen Koeffizienten, und wie in § 2 kann man zeigen:

Ist eine Funktion $\varkappa(p) \neq 0$ gegeben, so findet man zu jeder Vorgabe von $\alpha_0 \in \mathbb{R}^2$, (t_0, n_0) positiv orientierte ONB auf $\mathbb{R}^2$, genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha: [p_0, p_1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(p_0) = \alpha_0$,

$$\varkappa_\alpha = \varkappa, \qquad t_\alpha(\rho_0) = t_0, \quad n_\alpha(\rho_0) = n_0 .$$

Nun zum Beweis von b) des Satzes: Ist $\varkappa_\alpha$ konstant $\neq 0$, so ist nach obigem Gleichungssystem

$$\frac{d}{d\rho}\left(\alpha(\rho) + \frac{1}{\varkappa_\alpha} n_\alpha(\rho)\right) = t_\alpha(\rho) + \frac{1}{\varkappa_\alpha} n_\alpha'(\rho) \equiv 0,$$

also

$$\alpha(\rho) + \frac{1}{\varkappa_\alpha} n_\alpha(\rho) \equiv \xi \in \mathbb{R}^2 .$$

Das bedeutet

$$|\alpha(\rho) - \xi| \equiv \frac{1}{|\varkappa_\alpha|},$$

alle Punkte $\alpha(\rho)$ liegen auf der Kreislinie um ξ mit Radius $1/|\varkappa_\alpha|$. □

Eine weitere einfache globale Aussage ist

<u>Satz</u>: Sei α eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$. Dann gilt:

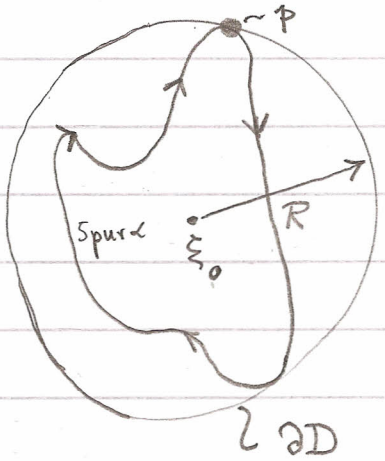
$$\boxed{\max |\varkappa_\alpha| \geq 1/\operatorname{diam}(\operatorname{Spur}\alpha).}$$

Hierbei ist $\operatorname{diam}(\operatorname{Spur}\alpha) := \max_{\rho_1,\rho_2 \in [a,b]} |\alpha(\rho_1) - \alpha(\rho_2)|$

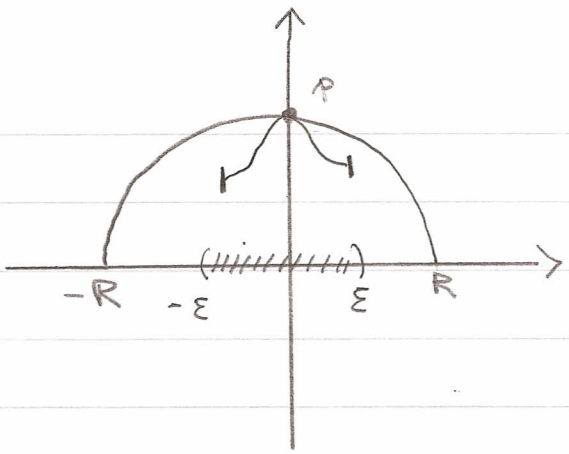
der Durchmesser von Spur α, und wir nehmen an, dass $[a,b]$ das Parameterintervall ist.

Beweis: Da die Spur von $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kompakt ist, können wir Spur α in eine abgeschlossene Kreisscheibe $D := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_0| \le R\}$ legen. Wählen wir hier R minimal, so berührt Spur α den Rand ∂D in mindestens einem Punkt p (sonst könnte man R verkleinern).

Nach geeigneter Drehung und Verschiebung können wir p auf die obere y-Achse bringen,



so daß α lokal bei p als Graph einer Funktion $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.



Für 2D haben wir dann die Darstellung als Graph von $g(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$. Für die weitere Rechnung beachte man: a) f ist in 0 maximal, also $f'(0) = 0$; (entsprechend für g)

b) 0 ist Minimum von $g - f$ und

$$g - f \geq 0 \quad \text{auf } (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Formel für die orientierte Krümmung im Graphfall ergibt sodann: ($p = \alpha(p_0)$)

$$|\varkappa_\alpha(p_0)| = |f''(0)| \Big/ \sqrt{1+|f'(0)|^2}^3 = |f''(0)| =$$

$$-f''(0) = \underbrace{g''(0) - f''(0)}_{\geq 0} - g''(0) \geq$$

$$-g''(0) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ max. in } 0}}{=} |g''(0)| = |g''(0)| \Big/ \sqrt{1+|g'(0)|}^3 =$$

$$|\varkappa_{\text{Kreis}}| = 1/R \quad .$$

Also ist $\max |\varkappa_\alpha| \geq 1/R$, und wegen

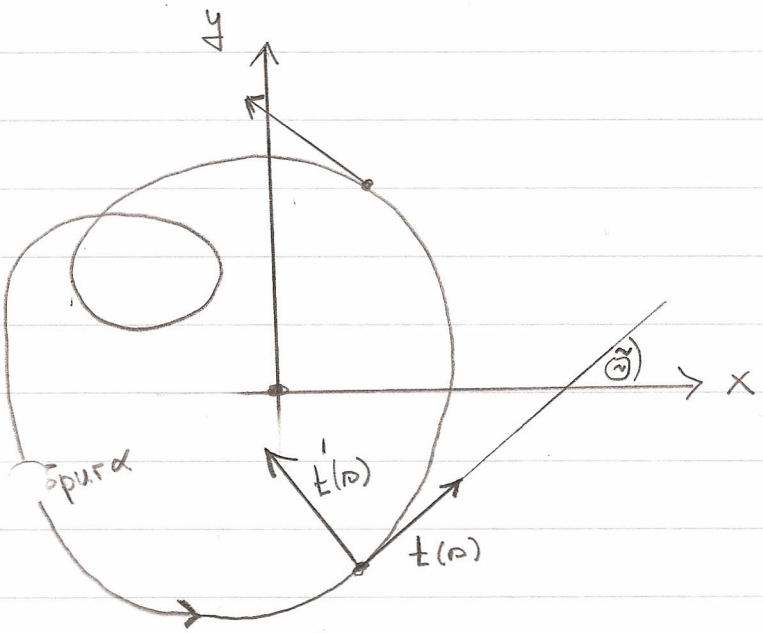
$\operatorname{diam}(\text{Spur}\,\alpha) \geq R$ (sonst passt Spur α in einen Kreis mit Rad. $<R$)

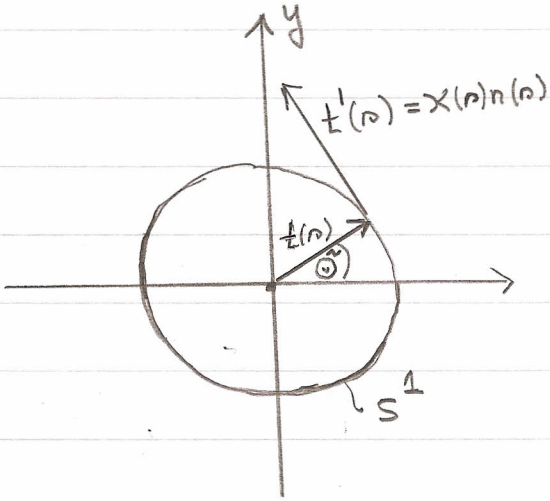
folgt die Behauptung. □

Als nächstes wollen wir den <u>Rotationsindex</u> für geschlossene Kurven $\alpha: [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definieren, wobei wir wie <u>immer Parametrisierung nach der Bogenlänge annehmen</u>. (Dann ist natürlich L = Länge Spur α!)

Sei ab jetzt $\alpha: [0,L] \to \mathbb{R}^2$ geschlossene Kurve mit Tangentialabbildung $t = \alpha': [0,L] \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Mit α ist auch t eine geschlossene Kurve mit Spur in der Kreislinie S^1. Man stellt sich anschaulich vor: Wird Spur α durchlaufen, so durchläuft t den Einheitskreis einfach oder mehrfach, und diese Zahl der Durchläufe (mit

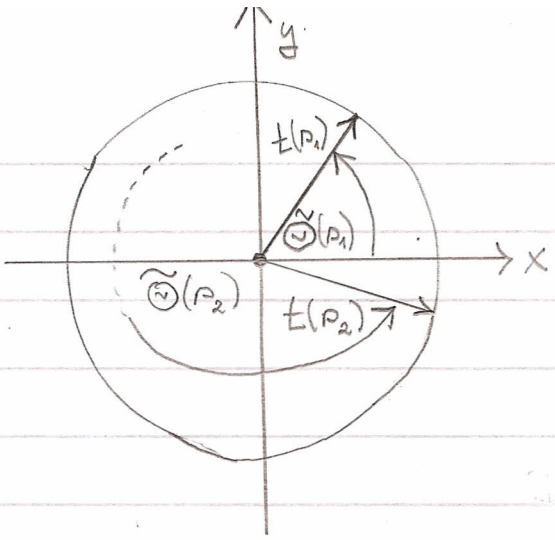
Vorzeichen versehen) nennt man den Rotationsindex von α.





Sei $\tilde{\Theta}(\rho) \in [0, 2\pi)$ der eindeutig bestimmte Winkel zwischen dem Tangentenvektor $t(\rho)$ und der positiven x-Achse gemessen gegen den Uhrzeigersinn. (*) s.u. Die Funktion $\tilde{\Theta}$ ist i.a. unstetig, denn ist $\tilde{\Theta}(\rho_0) = 0$ und dreht sich t gegen den Uhrzeigersinn, so hat man für $\rho > \rho_0$ nahe ρ_0 sehr kleine $\tilde{\Theta}$-Werte, wogegen für $\rho = \rho_0 - \varepsilon$ nahezu der Wert 2π vorliegt.

(*): $\tilde{\Theta}(\rho)$ ist der orientierte Winkel, der angibt, wie weit man die positive x-Achse gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, damit man $t(\rho)$ bekommt.



Das unangenehme Verhalten von $\widetilde{\sim}$ wird "beseitigt" durch

Lemma: Es gibt eine stetige Funktion $\sim : [0, L] \to \mathbb{R}$

mit $(*)$ $\boxed{\sim(p) \equiv \widetilde{\sim}(p) \mod (2\pi).}$

Die Funktion $\sim(p)$ erfüllt gemäß $(*)$ also die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi}\left[\sim(p) - \widetilde{\sim}(p)\right] \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Die Tangentenabbildung $t : [0, L] \to S^1$ ist auf dem kompakten Intervall $[0, L]$ gleichmäßig stetig, zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher $\delta > 0$ mit

$$|p_1 - p_2| < \delta \Longrightarrow |t(p_1) - t(p_2)| < \varepsilon.$$

Speziell kann man für $\varepsilon > 0$ klein genug erreichen, dass $t(p_1), t(p_2)$ im Fall $|p_1 - p_2| < \delta$

in einer offenen Halbebene liegen. Man zerlegt $[0,L]$ in der Form

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_\ell = L$$

mit Teilpunkten ρ_j, für die $\rho_j - \rho_{j-1} < \delta$ gilt.

Wir definieren $\tilde{\vartheta}$ stetig und mit $(*)$ zunächst auf $[\rho_0, \rho_1]$, danach wiederholt man diesen Prozess induktiv und hat die Aussage des Lemmas.

Fall 1: $\tilde{\vartheta}(\rho_0) = 0$ $(\Rightarrow t(\rho_0) = (1,0))$ (kritische Lage!)

Dann sei für $\rho \in [\rho_0, \rho_1]$

$$\vartheta(\rho) := \begin{cases} \tilde{\vartheta}(\rho), \text{ falls } y\text{-Koordinate von } t(\rho) \geq 0 \\ \tilde{\vartheta}(\rho) - 2\pi, \quad -\!\!-\!\!- \quad < 0 \end{cases}$$

Fall 2: $\tilde{\vartheta}(\rho_0) \in (0, 2\pi)$

Für ε passend ist dann $\tilde{\vartheta}(\rho) > 0$ auf $[\rho_0, \rho_1]$ und man kann $\vartheta := \tilde{\vartheta}$ auf $[\rho_0, \rho_1]$ definieren.

Nun argumentiere man entsprechend auf $[p_1, p_2]$, usw. □

Insbesondere ist

$$I := \frac{1}{2\pi}\,[\tilde{\varphi}(L) - \tilde{\varphi}(0)] \in \mathbb{Z}.$$

Es handelt sich bei dieser ganzen Zahl um eine Invariante, die nicht von der speziellen Hilfsfunktion $\tilde{\varphi}$ des Lemmas abhängt: Ist $\tilde{\varphi}^*$ eine zweite Funktion (also stetig und mit $\tilde{\varphi}^*(p) \equiv \varphi(p) \pmod{2\pi}$), so gilt

$$\tilde{\varphi}^*(p) - \tilde{\varphi}(p) = \tilde{\varphi}^*(p) - \widetilde{\varphi}(p) - \left(\tilde{\varphi}(p) - \widetilde{\varphi}(p)\right) =$$

$$2\pi\,(n^*(p) + n(p)) =: 2\pi\, m(p)$$

mit Funktionen $n, n^* : [0, L] \longrightarrow \mathbb{Z}$. Die Funktion $\tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}$ ist stetig, das geht aber nur, wenn $m(p) \equiv m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ist. Es folgt:

$$\tilde{\varphi}^* = \tilde{\varphi} + 2\pi m, \quad \text{also}$$

$$\tilde{\varphi}^*(L) - \tilde{\varphi}^*(0) = \tilde{\varphi}(L) - \tilde{\varphi}(0).$$

Das rechtfertigt

<u>Definition:</u> Es sei $\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Ist $\tilde{\Theta}$ wie im Lemma, so heißt

$$I_\alpha := \frac{1}{2\pi} [\tilde{\Theta}(L) - \tilde{\Theta}(0)] \in \mathbb{Z}$$

der <u>Rotationsindex der Kurve α</u>.

Zum Beweis der Existenz der Funktion $\tilde{\Theta}$ wurde lediglich benutzt, dass die Tangentenabbildung $t(s)$ stetig ist mit $t(0) = t(L)$. Wegen (*) aus dem Lemma und gemäß der Definition von $\tilde{\Theta}(s)$ gilt

$$t(s) = (\cos \tilde{\Theta}(s), \sin \tilde{\Theta}(s)),$$

$$n(s) = (-\sin \tilde{\Theta}(s), \cos \tilde{\Theta}(s))$$

also $t'(s) = \tilde{\Theta}'(s)\, n(s)$, d.h. nach Definition der Krümmung

$$\varkappa(p) = \Theta'(p).$$

Wir erhalten daraus die

Integraldarstellung des Rotationsindex von α :

$$\boxed{2\pi I_\alpha = \Theta(L) - \Theta(0) = \int_0^L \varkappa(p)\,dp}$$

Hier steht, dass $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \varkappa(p)\,dp$ eine ganze Zahl ist, was apriori nicht klar ist. Viele Autoren benutzen die Gleichung auch zur Definition von I_α. Als Anwendung der Begriffsbildung beweisen wir den berühmten

Theorem: "Umlaufsatz"

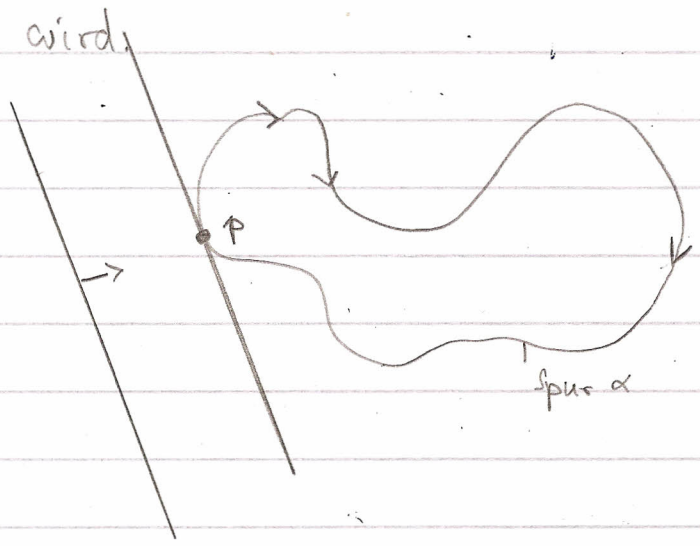
Sei $\alpha: [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Kurve (, d.h. $\alpha|_{[0,L)}$ ist injektiv). Dann gilt:

$$\text{Rotationsindex } I_\alpha \in \{+1, -1\}.$$

< Übung: Berechne I_α für verschiedene α >

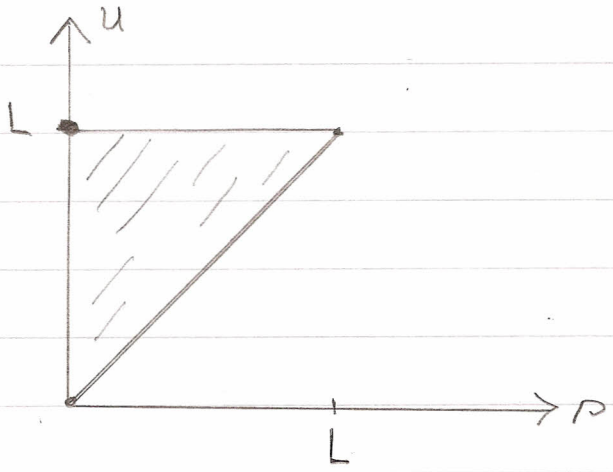
Beweis (nach Heinz Hopf, 1935):

Anschaulich ist klar, dass es einen Punkt $p \in \text{Spur}\,\alpha$ gibt, so dass Spur α ganz auf einer Seite der Tangente in p liegt. Dazu nehme man eine Gerade, die Spur α nicht trifft (existiert, da Spur α kompakt) und verschiebe diese solange parallel bis sie zu einer Tangente wird:



O.E. kann man annehmen, dass $p = \alpha(0) = \alpha(L)$ ist, sonst parametrisiere man um, was den Index nicht ändert.

Auf dem Dreieck $\Delta_L := \{(s,u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le u \le L\}$



betrachtet man die Schnittabbildung

$$\sigma(\rho,u) := \begin{cases} \dfrac{\alpha(u)-\alpha(\rho)}{|\alpha(u)-\alpha(\rho)|} & , \rho<u,\ u-\rho<L \\ \alpha'(\rho) & , \rho=u \\ -\alpha'(0) & , \rho=0,\ u=L \end{cases}$$

Da α einfach geschlossen ist, ist $\sigma(\rho,u)$ wohldefiniert, denn in der ersten Definitionszeile ist $\rho=0$, $u=L$ ($\Rightarrow \alpha(u)=\alpha(\rho)$) "verboten", nur für diese Wahl ist $\alpha(u)=\alpha(\rho)$. Außerdem ist σ stetig: Dazu ist zu prüfen:

1.) Ist $0\le\rho_0\le L$, so gilt

$$\lim_{\substack{(\rho,u)\to(\rho_0,\rho_0)\\ u>\rho}} \frac{\alpha(u)-\alpha(\rho)}{|\alpha(u)-\alpha(\rho)|} = \alpha'(\rho_0)$$

und

2.) $$\lim_{\substack{(s,u)\to(0,L)\\ u>s}} \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = -\alpha'(0)$$

ad 1.) Für $s<u$, $u-s<L$ ist

$$\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{u-s} \cdot \left|\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{u-s}\right|^{-1},$$

$$\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{u-s} = \frac{1}{u-s}\int_0^1 \alpha'(s+\varrho(u-s))\,d\varrho =$$

$$\int_0^1 \alpha'(s+\varrho(u-s))\,d\varrho \longrightarrow \alpha'(s_0),$$

falls $(s,u)\to(s_0,s_0)$, $s_0\geq 0$, $u>s$.

Also: $$\lim_{\dots} \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \frac{\alpha'(s_0)}{|\alpha'(s_0)|} = \alpha'(s_0)$$

wegen $|\alpha'(s_0)|=1$.

ad 2.) Seien $s<u$, $u-s<L$. Es gilt $\alpha(s)=\alpha(s+L)$ (α L-periodisch fortgesetzt), also

$$\frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|} = \frac{\alpha(u)-\alpha(s+L)}{u-(s+L)} \cdot \frac{u-(s+L)}{|\alpha(u)-\alpha(s+L)|}$$

mit $\left(\alpha(u) - \alpha(\rho+L)\right)\left(u-(\rho+L)\right) \to \alpha'(L)$

bei $u \to L$, $\rho \to 0$, $u > \rho$. (p.o.) gemäß

$u-(\rho+L) < 0$ gilt dann bei diesem Grenzübergang

$$u-(\rho+L) \Big/ |\alpha(u)-\alpha(\rho+L)| \longrightarrow -1/|\alpha'(L)|\,,$$

was wegen $|\alpha'|=1$ und $\alpha'(0)=\alpha'(L)$ die Aussage 2.) ergibt.

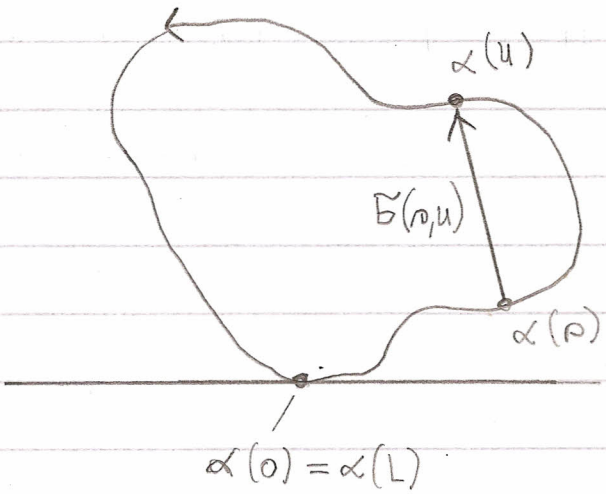
<u>Die weitere Vorgehensweise zur Berechnung von I_α sieht so aus:</u>

- I_α wird vom Tangentialfeld t_α bestimmt und wie nach der Definition des Rotationsindex vermerkt, können wir für jede stetige Kurve $T: [0,L] \to S^1$ eine Zahl $I_T \in \mathbb{Z}$ definieren sofern $T(0) = T(L)$ ist. (Man mache einfach die Konstruktion nach!) Speziell ist $I_\alpha = I_{t_\alpha}$.

- Ist $T_\rho : [0,L] \to S^1$, $0 \le \rho \le 1$, eine Familie geschlossener Kurven, die stetig von ρ abhängt, so ist $\rho \mapsto I_{T_\rho}$ stetig, also $\equiv$ const, da

$\mathbb{Z}$ - wertig.

- Man suche eine Schar T_ρ, so dass $T_0 = t\ (= t_\alpha)$ ist, und gleichzeitig T_1 eine so einfache Gestalt hat, dass man I_{T_1} ausrechnen kann.



(Skizze der Sehnenabbildung, falls $|\delta(u) - \delta(\rho)| = 1$)

Um diese Schritte auszuführen, sei

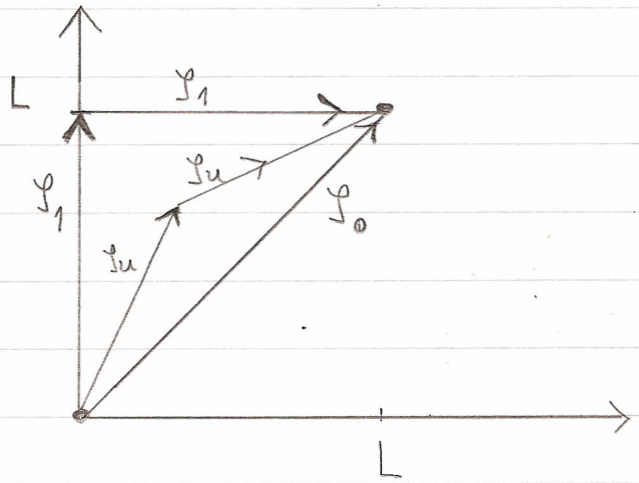
$$\varphi_u(\rho) := \begin{cases} L \cdot ((1-u)\rho, (1+u)\rho), & 0 \le \rho \le 1/2, \\ L \cdot ((1+u)\rho - u, (1-u)\rho + u), & \frac{1}{2} \le \rho \le 1, \end{cases}$$

wobei $0 \le u \le 1$ als fixierter Parameter gedacht wird.

Es gilt: φ_u hat Werte in Δ_L für jedes $u \in [0,1]$, φ_u passt bei $\frac{1}{2}$ stetig zusammen

und auch $(p,u) \mapsto \varphi_u(p)$ ist eine stetige Abbildung $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Delta_L$. Die Skizze zeigt die Spur von φ_u in Δ_L, speziell ist

$$\varphi_0(p) = L \cdot (p,p)$$



Alle Spuren starten in $(0,0)$ und laufen wie angedeutet nach (L,L), die Spur von φ_0 ist die Diagonale. Es sei schließlich

$$T_u := \sigma \circ \varphi_u : [0,1] \longrightarrow S^1, \quad 0 \le u \le 1$$

Man hat Stetigkeit von σ, also Stetigkeit von jeder einzelnen Kurve T_u, aber offensichtlich ist auch $(p,u) \mapsto T_u(p) = \sigma(\varphi_u(p))$ stetig

wegen der Stetigkeit von $(p,u) \mapsto \gamma_u(p)$. Daher und mit den Vorbemerkungen ist

$$\text{Rotationsindex } I_{T_u} \text{ der Kurve } T_u \equiv \text{konst} \in \mathbb{Z}.$$

(beachte: $\overbrace{T_u(0) = T_u(1)}^{=\alpha'(0)}$; T_u erfüllt also die Erfordernisse zur Definition des Index!)

Außerdem: $T_0(p) = \sigma(\gamma_0(p)) = \sigma(L(p,p)) = \alpha'(Lp)$,

m.a.W.: $I_{T_0} = I_\alpha$,

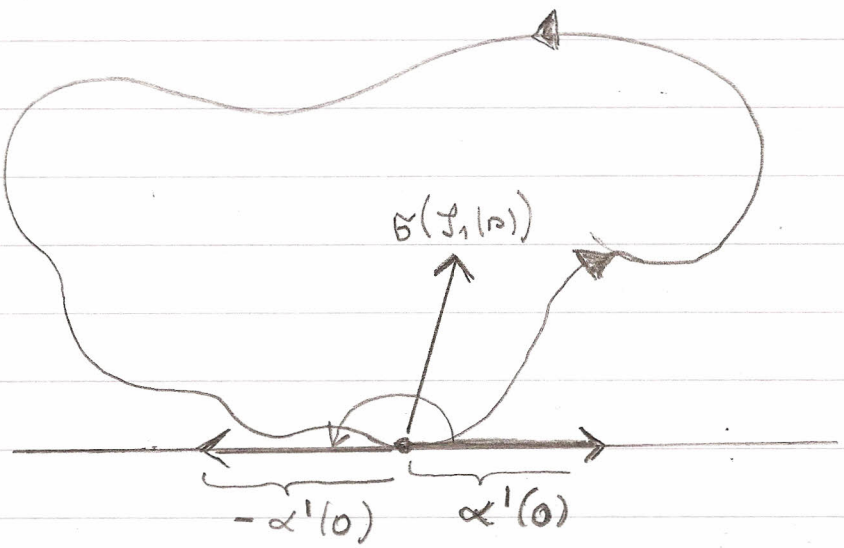
so dass obige Zahl "konst $\in \mathbb{Z}$" gerade I_α ist.

Insbesondere folgt:

$$I_\alpha = I_{T_1},$$

und den Index von T_1 können wir an einem letzten Schritt ausrechnen:

Es ist $T_1 = \sigma \circ \varphi_1 : [0,1] \to S^1$.



Durchläuft ρ das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$, so durchläuft

$$\sigma(\varphi_1(\rho)) = \sigma(0, 2L\rho) = \frac{\alpha(2L\rho) - \alpha(0)}{|\alpha(2L\rho) - \alpha(0)|}$$

die normierten Sehnen vom Punkt $\alpha(0)$ aus,

wobei $\sigma(\varphi_1(0)) = \alpha'(0)$, $\sigma\left(\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\alpha'(0)$,

wobei $\sigma(\varphi_1(\rho))$ stets auf derselben Hälfte von S^1 bleibt, da Spur α ja auf einer Seite der Tangente in α in $\alpha(0)$ bleibt. Die Änderung des Winkels ist also π oder $-\pi$ (in der Skizze: $+\pi$).

Für ρ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 variiert

$$\sigma(\gamma_1(\rho)) = \sigma(2L\rho - L, L) =$$

$$\frac{\alpha(L) - \alpha(2L\rho - L)}{|\alpha(L) - \alpha(2L\rho - L)|} = \frac{\alpha(0) - \alpha(2L\rho - L)}{|\alpha(0) - \alpha(2L\rho - L)|}$$

offensichtlich genau in der anderen Hälfte von S^1, die Winkeländerung (von $-\alpha'(0) = \sigma(\gamma_1(\frac{1}{2}))$ auf $\alpha'(0) = \sigma(\gamma_1(1))$) ist wieder $+\pi$ oder $-\pi$ (in beiden Fällen gleiches Vorzeichen), insgesamt folgt 2π oder -2π als Winkeländerung, so dass $I_\alpha = \pm 1$. □

<u>Korollar</u>: Es sei $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine <u>einfach</u> geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. $\varkappa_\alpha$ bezeichne die orientierte Krümmung. Dann gilt:

a) $$\int_0^L \varkappa_\alpha \, d\rho = \pm 2\pi .$$

(Die Größe $\int_0^L \varkappa_\alpha \, ds$ wird auch Totalkrümmung von α genannt. Für einfach geschlossene Kurven ist diese also $\pm 2\pi$.)

b) Ist $|\varkappa_\alpha| \geq \frac{1}{r}$ für ein $r > 0$, so ist

$$L = L(\alpha) \ (= \text{Länge von } \alpha) \leq 2\pi r.$$

c) Aus $|\varkappa_\alpha| \leq \frac{1}{r}$ folgt $L(\alpha) \geq 2\pi r$.

d) Es ist $\max |\varkappa_\alpha| \geq 2\pi / L$.

Beweis: a) Für geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven wurde gezeigt

$$2\pi I_\alpha = \int_0^L \varkappa_\alpha(s) \, ds,$$

so dass die Behauptung für einfach geschlossene Kurven aus $I_\alpha = \pm 1$ folgt.

c) Es ist mit a) $2\pi = \left| \int_0^L \varkappa_\alpha \, ds \right| \leq$

$$\int_0^L |\varkappa_\alpha| \, d\rho \leq \frac{L}{r} \quad , \text{ also } \quad L \geq 2\pi r.$$

b) Die Voraussetzung $|\varkappa_\alpha| \geq 1/r$ liefert speziell, dass $\varkappa_\alpha$ keinen Vorzeichenwechsel hat. Also gilt wieder mit a):

$$2\pi = \left| \int_0^L \varkappa_\alpha \, d\rho \right| = \int_0^L |\varkappa_\alpha| \, d\rho \geq L/r,$$

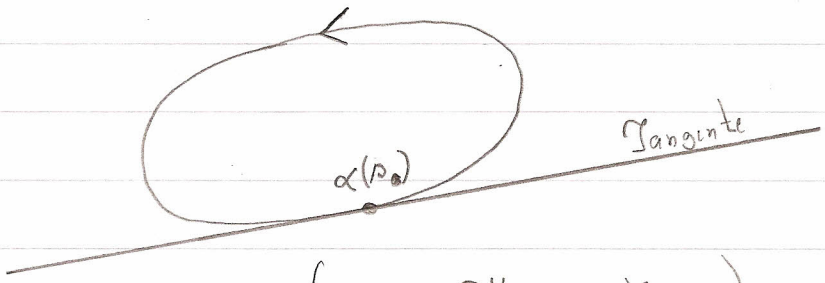
d.h. $L \leq 2\pi r$.

d) Wäre $\max |\varkappa_\alpha| \leq (1-\varepsilon) \, 2\pi/L$ für ein $\varepsilon > 0$, so ergibt c):

$$L \geq 2\pi \, \frac{1}{(1-\varepsilon)2\pi} \, L > L,$$

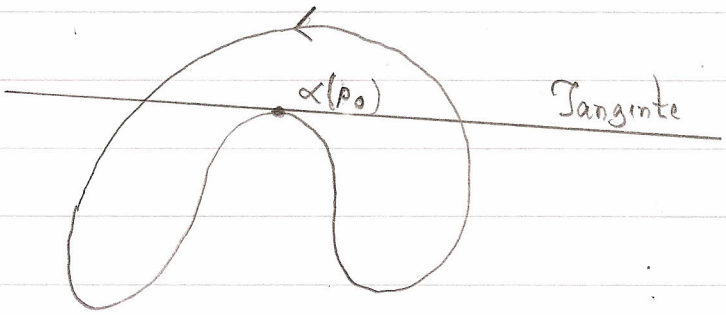
was unmöglich ist. □

Eine <u>Konvexe Kurve</u> in der Ebene wird anschaulich dadurch beschrieben, dass für jedes $\rho_0 \in I$ die Spur ganz auf der einen Seite der Tangente durch den Kurvenpunkt $\alpha(\rho_0)$ liegt.



" "
Konvex

(z.B. Ellipse, Kreis)



"nicht konvex"

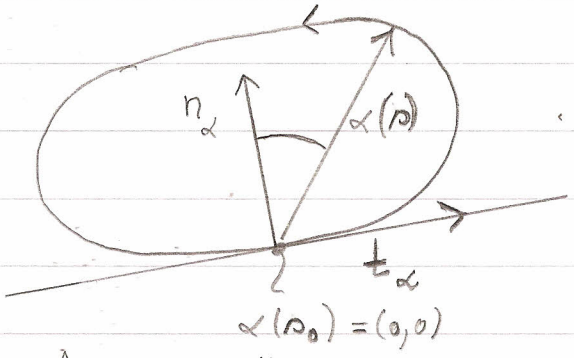
Definition: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve. α heißt Konvex, falls ~~für jede Stelle $p_0 \in I$~~ gilt:

$$(\alpha(p) - \alpha(p_0)) \cdot n_\alpha(p_0) \geq 0 \qquad \forall\, p \in I,\ p_0 \in I$$

oder $\quad -\!\!\!\parallel\!\!\!- \quad \leq 0 \qquad \forall\, p \in I,\ p_0 \in I.$

Hierbei ist $n_\alpha(p_0)$ der Normalenvektor zu α in p_0.

<Übung: man überlege, dass obige Ungleichungen hier „≥ 0".



genau bedeutet, dass Spur(α) überall ganz auf einer Seite der Tangente liegt!)

Konvexe Kurven lassen sich durch das Vorzeichen der Krümmung beschreiben – es darf keinen Vorzeichenwechsel geben (vgl. dies mit $f'' \geq 0$ für reelle Funktionen!).

Theorem (Charakterisierung konvexer Kurven)

Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\alpha \text{ konvex} \iff \begin{cases} \kappa_\alpha(p) \geq 0 & \forall\, 0 \leq p \leq L \\ \text{oder} & \\ \kappa_\alpha(p) \leq 0 & \forall\, 0 \leq p \leq L. \end{cases}$$

Bemerkung: Eine einfach geschlossene, konvexe Kurve zerlegt anschaulich den $\mathbb{R}^2$ in genau zwei Teile, nämlich die konvexe, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$,

die von Spur α umschlossen wird, und den dazu disjunkten unbeschränkten Rest. Allgemeiner (ohne Krümmungsvoraussetzung und daher viel schwerer zu beweisen) gilt der folgende topologische Satz

Jordan'scher Kurvensatz: Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine lediglich stetige, einfach geschlossene Kurve. Dann hat $\mathbb{R}^2$ - Spur α genau 2 Zusammenhangskomponenten, eine ist beschränkt ("Inngebiet"), die andere unbeschränkt ("Aussengebiet").

Beweis des Theorems: 1.) Es sei zunächst α konvex im Sinne der Definition. Dann gilt etwa in $s_0 \in [0, L]$

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \geq 0 \quad \forall\, s \in [0, L].$$

Gleichzeitig hat man die Taylorentwicklung bei s_0

$$\alpha(p) - \alpha(p_0) = (p-p_0)\,\underset{\alpha}{t}(p_0) + \frac{1}{2}(p-p_0)^2\,\varkappa_\alpha(p_0)\,n_\alpha(p_0)$$

$$+ \text{Restglied},$$

wobei das Ristglied $R(p,p_0)$ die Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{p\to p_0} (p-p_0)^{-2} R(p,p_0) = 0$$

gilt. Es folgt:

$$0 \le (p-p_0)^{-2} \left(\alpha(p)-\alpha(p_0)\right)\cdot n_\alpha(p_0) =$$

$$(p-p_0)^{-1} \underbrace{\underset{\alpha}{t}(p_0)\cdot n_\alpha(p_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\varkappa_\alpha(p_0) \underbrace{n_\alpha(p_0)\cdot n_\alpha(p_0)}_{=1} +$$

$$(p-p_0)^{-2} R(p,p_0)\cdot n_\alpha(p_0)$$

und nach Grenzübergang $p \to p_0$: $\frac{1}{2}\varkappa_\alpha(p_0) \ge 0$.

2.) Sei o.E. $\varkappa_\alpha \ge 0$ auf $[0,L]$.

Annahme: α ist <u>nicht</u> konvex.

< <u>Übung</u>: Details! > □

Definition: Sei $\alpha: [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Ein **Scheitel** ("vertex") von α ist eine **lokale Extremstelle** $s_0 \in [0, L]$ der orientierten Krümmung.

Interessant ist diese Begriffsbildung für geschlossene Kurven:

Kreis: jeder Punkt ist Scheitel

Ellipse: es gibt genau vier Scheitel

(bezogen auf reguläre Parametrisierungen!)

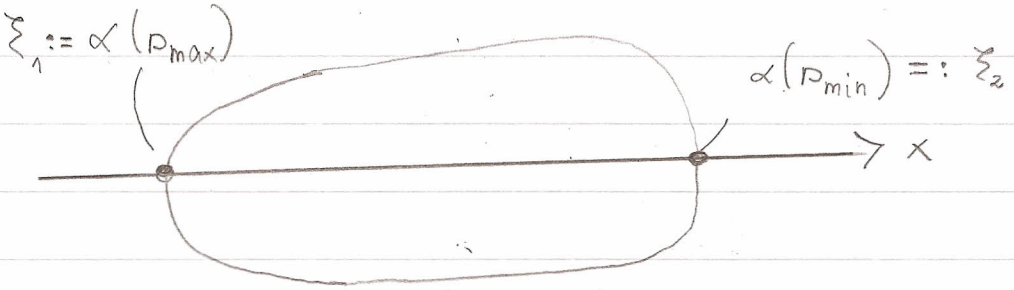
Ein berühmter Satz sagt, dass es für konvexe Kurven mindestens 4 Scheitel geben muss.

Theorem (Vierscheitel-Satz)

Sei $\alpha: [0, L] \to \mathbb{R}^2$ einfach geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. **Ist α konvex, so gibt es mindestens vier Scheitel.**

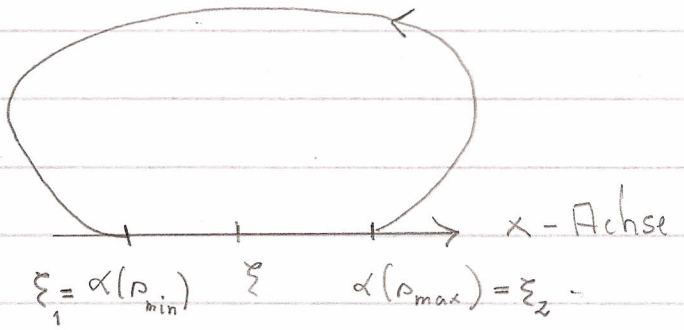
Beweis (nach Herglotz, 1913): 1.) Als stetige Funktion $[0,L] \to \mathbb{R}$ auf dem Kompaktum $[0,L]$ nimmt $\varkappa_\alpha$ seine absoluten Extremwerte an mindestens zwei Stellen an. (Das ist klar, falls $\min \varkappa_\alpha < \max \varkappa_\alpha$. Gilt "$=$", so ist jede Stelle Extremum, und man ist fertig.)
("Man kann daher nachfolgend „<" annehmen!)
Es gibt also mindestens 2 Scheitel, ρ_{max} und ρ_{min}.

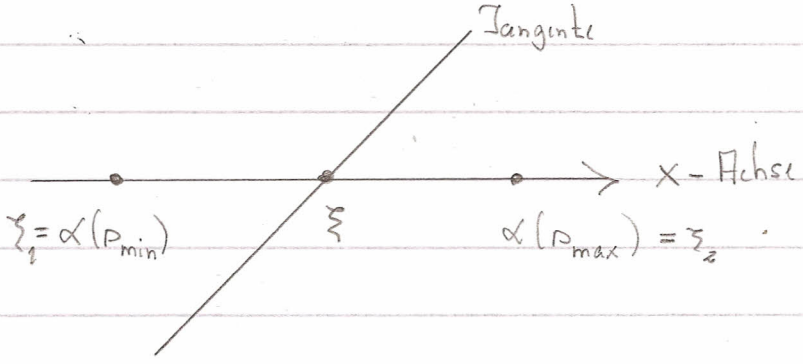
Nach Drehung und Verschiebung kann man erreichen, dass die x-Achse durch $\alpha(\rho_{min})$ und $\alpha(\rho_{max})$ geht.



2.) Man überlegt sich: Die x-Achse hat keinen zwischen ξ_1 und ξ_2 weiteren Punkt mit Spur α gemeinsam. Nehmen wir an, dass es doch einen dritten gemeinsamen

Punkt ξ gibt. Ist die Tangente in ξ gleich der x-Achse, so verläuft wegen der Konvexität von α ein Teil der Spur von α in dieser Geraden, was $\varkappa(\rho_{min}) = \varkappa(\rho_{max}) = 0$ ergibt, Wspr. Also schneidet die Tangente in ξ die x-Achse genau in ξ, dann liegen aber $\alpha(\rho_{min})$ und $\alpha(\rho_{max})$ auf verschiedenen Seiten der Tangente, was auch der Konvexität widerspricht.





3.) Also schneidet α die x-Achse nur in ξ_1 und ξ_2.

O.E. sei $\varkappa_\alpha(0) = \min \varkappa_\alpha$, $\varkappa_\alpha(\rho^*) = \max \varkappa_\alpha$,

also $0 = \rho_{min}$, $\rho^* = \rho_{max} \in (0, L)$.

<u>Hätte α nur diese beiden Scheitel</u>, so wäre

$$\varkappa_\alpha' \geq 0 \quad \text{auf } [0, \rho^*]$$

und

$$\varkappa_\alpha^* \leq 0 \quad \text{auf } [\rho^*, L]$$

(andernfalls hätte $\varkappa_\alpha$ weitere lokale Extrema!).

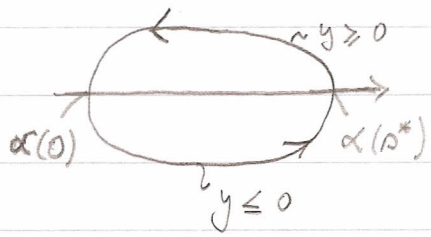
Schreibt man $\alpha(\rho) = (x(\rho), y(\rho))$, so folgt

$$* \quad \begin{cases} \varkappa_\alpha'(\rho)\, y(\rho) \geq 0 & \forall\ \rho \in [0, L] \\ \text{oder} \quad -\!\!-\ \cdot \leq 0 & -\!\!- \end{cases},$$

denn es ist nach Konstruktion

$$y(\rho) \geq 0 \text{ auf } [0, \rho^*] \text{ und } y \leq 0 \text{ auf } [\rho^*, L]$$

oder umgekehrt.



Mit $t_\alpha(\rho) = (x'(\rho), y'(\rho))$,

$n_\alpha(\rho) = (-y'(\rho), x'(\rho))$ und $t_\alpha'(\rho) = \varkappa_\alpha(\rho)\, n_\alpha(\rho)$

folgt (1^{te} Komponente der letzten Gleichung)

$$** \quad x''(\rho) = \varkappa_\alpha(\rho)\,(-y'(\rho)).$$

Nehmen wir an, dass die 1^{te} Zeile von $*$ zutrifft. Dann ist

$$0 \le \int_0^L \varkappa_\alpha'(\rho)\, y(\rho)\, d\rho = -\int_0^L \varkappa_\alpha(\rho)\, y'(\rho)\, d\rho$$

$$\underset{**}{=} \int_0^L x''(\rho)\, d\rho = x'(L) - x'(0) = 0$$

wegen $\alpha'(0) = \alpha'(L)$. Dabei haben wir partiell integriert. Wegen der Geschlossenheit von α gibt es keine Randterme. Es folgt wegen $*$ $\quad \varkappa_\alpha' \, y \equiv 0$

auf $[0, L]$, also $\varkappa_\alpha' = 0$. Dann ist $\varkappa_\alpha \equiv \text{const}$, α ein Kreis, was unserer Annahme (nur 2 Scheitel existieren) widerspricht. Also gibt es mindestens 3 Scheitel. Dann findet man aber auch 4, da sich Max- und Min.stellen abwechseln.

□

Zum Abschluss diskutieren wir die wohl berühmteste Aussage:

Theorem (Isoperimetrische Ungleichung)

Es sei C eine einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Länge L. A sei der Flächeninhalt des von C eingeschlossenen Gebiets. Dann gilt

$$4\pi A \leq L^2$$

mit „$=$" genau dann, wenn C ein Kreis ist.

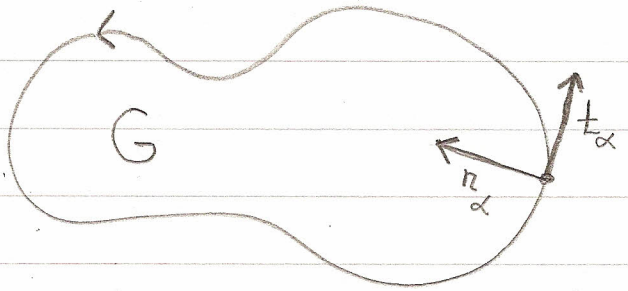
Bemerkung: 1.) Denkt man sich die Länge L als fest vorgegeben, so ist also für Kurven C mit Länge $= L$ die Fläche A kleiner als $L^2/4\pi$ außer wenn C ein Kreis ist, da dann „$=$" eintritt. M.a.W.: Bei gegebener Länge maximieren genau die Kreise den eingeschlossenen Inhalt.

2.) Ohne den Jordanschen Kurvensatz ist unklar, was mit dem „von der Kurve umschlossenen Gebiet" gemeint ist.

Beweis: (nach Erhard Schmidt 1939)

1.) Wir leiten zunächst eine Formel für den Flächeninhalt F ab. G sei das "Innengebiet", das von der Spur der einfach geschlossenen Kurve $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ berandet wird. (Wir nehmen α als nach der Bogenlänge parametrisiert an!) O.E. sei α positiv orientiert, d.h. $n_\alpha(s)$ ist innere Normale (zeigt in G hinein) an ∂G.

Das äußere Normalenfeld $\nu : \partial G \to \mathbb{R}^2$



ist per Definition

$$\nu(\xi) = -n_\alpha(s), \qquad \xi = \alpha(s),$$

und es gilt der Satz von Gauß

$$(1) \qquad \int_G \operatorname{div} \overline{F}\, dx\, dy = \int_{\partial G} \nu \cdot \overline{F}\, d\mathcal{H}^1$$

für Vektorfelder $\overline{F} : \overline{G} \to \mathbb{R}^2$. Hierbei ist

rechts mit $d\mathcal{H}^1$ die Integration bzgl. des Hausdorff-Maßes gemeint bzw. mit Rückgriff auf die Parametrisierung α ist

$$\int_{\partial G} = \int_0^L \nu(\alpha(\rho)) \cdot F(\alpha(\rho)) \underbrace{|\alpha'(\rho)|}_{=1} \, d\rho$$

Schreibt man $\alpha(\rho) = (x(\rho), y(\rho))$, so ist

$$\nu(\alpha(\rho)) = -n_\alpha(\rho) = (y'(\rho), -x'(\rho)), \text{ also}$$

$$\int_{\partial G} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 = \int_0^L \big(F^1(x(\rho), y(\rho)) \, y'(\rho)$$

$$(2) \qquad - F^2(x(\rho), y(\rho)) \, x'(\rho) \big) \, d\rho.$$

Man wählt in (1)

$$F(x,y) = (x,0) \text{ bzw. } (0,y) \text{ bzw. } \tfrac{1}{2}(x,y).$$

Für alle drei Fälle ist $\operatorname{div} F \equiv 1$, also

$$A = \int_G \operatorname{div} F \, dx\, dy,$$

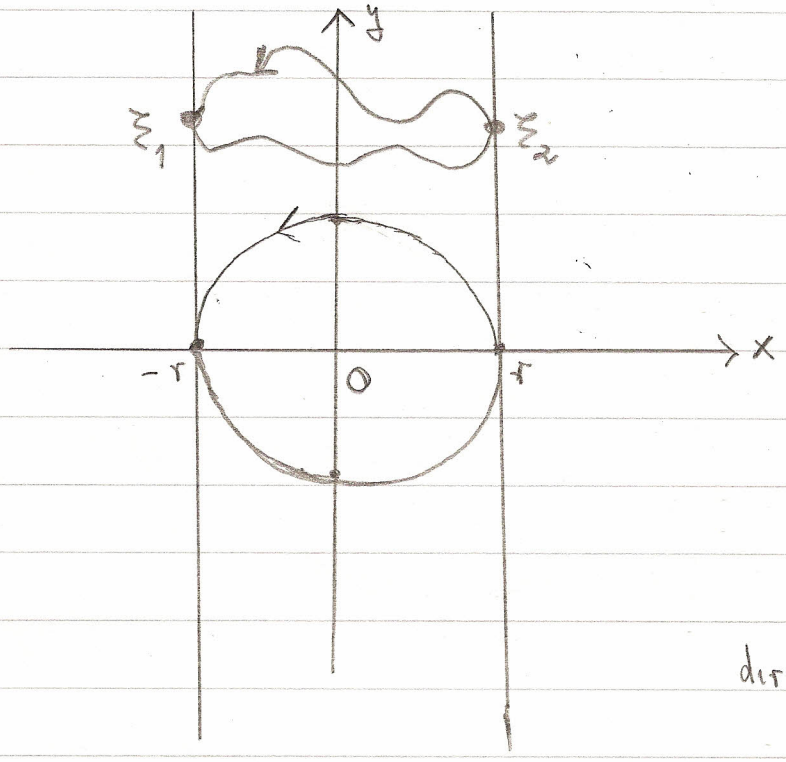
mit (2) berechnet man die Integrale über ∂G und

bekommt insgesamt:

$$A = \int_0^L x(\rho)\, y'(\rho)\, d\rho = \int_0^L (-y(\rho)\, x'(\rho))\, d\rho$$

$$\overset{(3)}{=} \int_0^L \frac{1}{2} \left(x(\rho)\, y'(\rho) - x'(\rho)\, y(\rho) \right) d\rho$$

2.) Wir wählen zwei Punkte $\xi_1, \xi_2 \in \text{Spur}\,\alpha$, die den Durchmesser von Spur α realisieren; also $|\xi_1 - \xi_2| = \text{diam}\,(\text{Spur}\,\alpha)$. Nach Drehung und Verschiebung können wir annehmen, dass die Situation so aussieht:



$2r = \text{diam Spur}\,\alpha$,

der Streifen || ist senkrecht zum Durchmesser $\overline{\xi_1 \xi_2}$,

der Kreis hat Radius r.

Es gelte: $\xi_2 = \alpha(0)$, $\xi_1 = \alpha(l)$ mit einem $l \in (0, L)$.

Die Parametrisierung $\alpha: [0, L] \to \mathbb{R}^2$ hat die Form

$\alpha(\rho) = (x(\rho), y(\rho))$, für den Kreis wählen wir die Parameterdarstellung (nicht notwendig regulär oder injektiv)

$$\beta(\rho) = (x(\rho), \tilde{y}(\rho)) \quad , \quad 0 \le \rho \le L,$$

mit $$\tilde{y}(\rho) = \begin{cases} + \sqrt{r^2 - x^2(\rho)}, & 0 \le \rho \le l \\ - \sqrt{\dots}, & l \le \rho \le L. \end{cases}$$

Die Kreisfläche ist πr^2, es ist aber nicht klar, ob die Formeln aus (3) das für die "schlichte Parametrisierung" β liefern. Wir rechnen dies deshalb nach:

$$\int_0^L \beta_1'(\rho)\, \beta_2(\rho)\, d\rho =$$

$$\int_0^l x'(\rho) \sqrt{r^2 - x^2(\rho)}\, d\rho - \int_l^L x'(\rho) \sqrt{r^2 - x(\rho)^2}\, d\rho =$$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - u^2}\, du - \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - u^2}\, du =$$

($u = x(\rho)$)

$$-2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}\,du = -\pi r^2 .$$

Damit folgt nun:

$$A+\pi r^2 \overset{(3)}{=} \int_0^L [x(\rho)y'(\rho)-\beta_1'(\rho)\beta_2(\rho)]\,d\rho =$$

$$\int_0^L (x(\rho),\beta_2(\rho))\cdot(y'(\rho),-\beta_1'(\rho))\,d\rho \le \text{(Cauchy-Schwarz Ungl.)}$$

$$\int_0^L \underbrace{|(x(\rho),\beta_2(\rho))|}_{=r}\;\underbrace{|(y'(\rho),-\beta_1'(\rho))|}_{=1}\,d\rho = rL.$$

Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel sagt $\sqrt{A\pi r^2} \le \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\pi r^2$,

so dass mit obiger Abschätzung

$$A\pi r^2 \le \left(\frac{1}{2}rL\right)^2 \iff L^2 \ge 4\pi A$$

ist.

3.) Diskussion der Gleichheit: Insgesamt tritt Gleichheit

lin, wenn

i.) Gleichheit in der AMG Ungl. vorliegt (, also $A = \pi r^2$)

und

ii) $(x(\rho), \beta_2(\rho))$, $(y'(\rho), -\beta_1'(\rho))$ positiv l.a. sind
(Gleichheitsbdg. bei Cauchy - Schwarz)

Es gilt $(x(\rho), \beta_2(\rho)) = (\beta_1(\rho), \beta_2(\rho)) = -r\, n_\beta(\rho)$

und $(y'(\rho), -\beta_1'(\rho)) = (y'(\rho), -x'(\rho)) = -n_\alpha(\rho)$.

Positive lineare Abhängigkeit bedeutet $n_\alpha = n_\beta$,

mithin $t_\alpha = t_\beta$. Das ergibt $\alpha = \beta + \text{const}$.

□

Kapitel II Flächentheorie

§1 Beschreibung parametrisierter Flächen – Grundbegriffe

Die Theorie differenzierbarer Kurven fasst die Kurven als Abbildungen $\alpha : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ auf. Wir übertragen diesen Standpunkt sinngemäß auf Flächen und betrachten zunächst global parametrisierte Flächen. Später erweitern wir diese Vorstellung und definieren Flächen als Punktmengen in $\mathbb{R}^3$, die lokal parametrisiert werden können.

Definition: parametrisierte Fläche

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen.

a) Eine (beliebig oft) differenzierbare Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt **parametrisiertes Flächenstück** bzw. **Fläche**, falls gilt: 1.) Für alle $(u, v) \in \Omega$

hat die Ableitung $DX(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ maximalen Rang $(=2)$. 2.) X ist injektiv und $X^{-1}: X(\Omega) \to \Omega$ ist stetig.

b) Der Untervektorraum $DX(u,v)(\mathbb{R}^2)$ heißt in diesem Fall Tangentialebene an X in (u,v), seine Elemente heißen Tangentenvektoren an X in (u,v).

Bemerkungen: 1.) $DX(u,v)$ wird repräsentiert durch die Matrix $(X_u\ X_v)(u,v)$ mit den Vektoren $X_u := \frac{\partial}{\partial u}X$ und $X_v := \frac{\partial}{\partial v}X$. Die Rangbedingung besagt, daß diese an jeder (u,v) des Parametergebiets Ω linear unabhängig sind. Man schreibt

$$T_{(u,v)}X$$

für die Tangentialebene und hat die Darstellung

$$T_{(u,v)}X = \{\lambda X_u(u,v) + \mu X_v(u,v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

2.) Sei (u_0, v_0) fixiert in Ω, $\xi := X(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$.

Man setzt:

$$\widetilde{T}_{(u_0,v_0)} X := \{\alpha'(0) : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3 \text{ Kurve mit } \operatorname{Spur} \alpha \subset X(\Omega),\ \alpha(0) = \xi\},$$

d.h. man betrachtet die Tangentenvektoren an Kurven mit Spur in Ω durch ξ. Sei $\beta_i(t) := (u_0, v_0) + t e_i$, $i = 1, 2$. Dann ist $\alpha_i(t) := X(\beta_i(t))$ eine solche Kurve mit $\alpha_i'(0) = \partial_i X(u_0, v_0)$, so dass $X_u(u_0, v_0)$, $X_v(u_0, v_0)$ zu $\widetilde{T}_{(u_0,v_0)} X$ gehören.

Genauso sieht man ($\beta(t) := (u_0, v_0) + t\lambda e_1 + t\mu e_2$), dass $\lambda X_u(u_0, v_0) + \mu X_v(u_0, v_0) \in \widetilde{T}_{(u_0,v_0)} X$ ist. (Es folgt $TX \subset \widetilde{T}X$.) Sei umgekehrt $\alpha'(0) \in \widetilde{T}_{(u_0,v_0)} X$.

Man setzt $\beta := X^{-1}(\alpha)$. Dann ist $\beta'(0) = \lambda e_1 + \mu e_2$, und aus ($\alpha = X \circ \beta$ folgt) $\alpha'(0) = DX(u_0, v_0)(\beta'(0))$

$= \lambda X_u(u_0,v_0) + \mu X_v(u_0,v_0)$, womit $\alpha'(0) \in T_{(u_0,v_0)} X$ bewiesen ist. Insgesamt ist gezeigt: $T_{(u_0,v_0)} X = \widetilde{T}_{(u_0,v_0)} X$.

3.) Der Satz über die inverse Abbildung liefert bei entsprechender Anwendung [vgl. Do Carmo, Prop. 2; p. 79], daß $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ (affine, mit a) 1.)) zumindest <u>lokal</u> injektiv ist und <u>lokal</u> eine stetige Inverse hat. Das bedeutet nicht die globale Injektivität von X, die Fläche kann Selbstdurchschneidungen haben, was wir mit a) 2.) ausschließen.

<u>Beispiele:</u> 1.) <u>(parametrisierte Ebene)</u>

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ und $X: \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto C + uA + vB$.

Dann ist $DX(u,v) = (A\,B)$, also: $\operatorname{Rg} DX(u,v) = \operatorname{Rg}(A\,B)$, und der Rang ist maximal genau dann, wenn A und B linear unabhängig sind.

Nehmen wir dies an, so ist X natürlich injektiv, also eine parametrisierte Fläche. Offenbar gilt:

$$\text{Bild}(X) = \{uA + vB + C : u,v \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{affine Hyperebene durch } C.$$

An jeder Stelle (u,v) ist dagegen

$$T_{(u,v)}X = \{\lambda A + \mu B : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

denn Tangentialebenen gehen per Definition immer durch $0 \in \mathbb{R}^3$. Hier ist die Tangentialebene die in den Ursprung verschobene affine Ebene $X(\mathbb{R}^2)$.

2.) (<u>parametrisierte Graphen</u>)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Wir definieren die <u>Graphenabbildung</u>

$$X: \Omega \ni (u,v) \mapsto (u,v,f(u,v)).$$

Dann ist X eine parametrisierte Fläche im Sinne der

Definition: Differenzierbarkeit und Injektivität sind klar.

Weiter ist $X_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$, $X_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$,

so dass X_u, X_v überall l.u. sind. Für die

Tangentialebene gilt

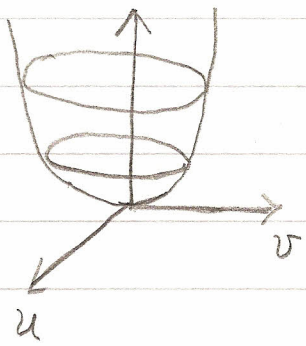
$$T_{(u,v)}X = \{\lambda(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}) + \mu(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\lambda, \mu, \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Konkret: a) (Parabel) Sei $f(u,v) := u^2 + v^2$, $X(u,v) :=$

(u, v, u^2+v^2). Es ist

$$DX(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

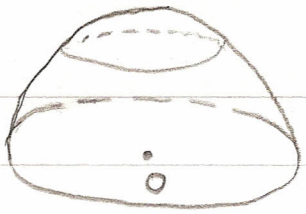


und $T_{(u,v)}X = \{(\lambda, \mu, 2\lambda u + 2\mu v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

b) (obere Halbsphäre) Mit $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$

sei $f(u,v) := \sqrt{1 - u^2 - v^2}$, $(u,v) \in \Omega$. Dann

ist das Bild von $X(u,v) := (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ die obere



Halbsphäre in $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$X_u = (1, 0, -u/\sqrt{1-u^2-v^2}),$$

$$X_v = (0, 1, -v/\sqrt{1-u^2-v^2}).$$

Speziell folgt $T_{(0,0)}X = \{(\lambda, \mu, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Definition: (Umparametrisierung)

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi: \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, so heißt $\widetilde{X}: \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{X} := X \circ \varphi$, die mit φ umparametrisierte Fläche. Ist $\det D\varphi > 0$, so heißt die Umparametrisierung orientierungstreu.

Beispiel: $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u^2+v^2 < 1\}$, $\widetilde{\Omega} := \{(r, \Theta) : 0 < r < 1, \Theta \in [0, 2\pi)\}$, $\varphi(r,\Theta) := r(\cos\Theta, \sin\Theta) = re^{i\Theta}$ (Polarkoordinaten)

Definition : Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

i) Das Vektorfeld V heißt tangential längs einer Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$, falls gilt:

$$V(u,v) \in T_{(u,v)} X \quad \forall (u,v) \in \Omega$$

ii) Das Feld V wird normal längs der Fläche X genannt; falls

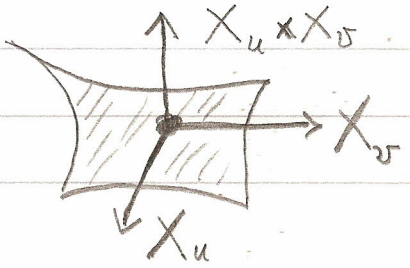
$$V(u,v) \in \left(T_{(u,v)} X\right)^{\perp} \quad \forall (u,v) \in \Omega \iff$$

$$V(u,v) \cdot W = 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega, \forall W \in T_{(u,v)} X.$$

Kanonisches Beispiel: $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Fläche $\Longrightarrow$

$X_u, X_v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tangentiale Felder längs X,

$X_u \times X_v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ normales Feld längs X.



beachte: $X_u \times X_v \neq 0$, da X_u, X_v l.u. !

Alle tangentialen VF (= Vektorfelder) längs der Fläche X lassen sich aus X_u, X_v linear kombinieren, genauer:

Satz 1: Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, V sei tangentiales VF längs X. Dann gibt es differenzierbare Funktionen $\alpha, \beta: \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$* \quad V(u,v) = \alpha(u,v) X_u(u,v) + \beta(u,v) X_v(u,v), \quad (u,v) \in \Omega.$$

Sind umgekehrt α, β differenzierbar auf Ω, so wird durch $*$ ein tangentiales VF längs X definiert.

Beweis: Die "umgekehrt" Aussage ist klar!

Sei $V: \Omega \to \mathbb{R}^3$ also tangential V.F. längs X.

Da X_u und X_v l.u. sind und $T_{(u,v)} X$ an jeder

Stelle $(u,v) \in \Omega$ aufspannen, folgt, dass es eindutig bestimmte Funktionen $\alpha, \beta : \Omega \to \mathbb{R}$ mit * gibt. Um deren Differenzierbarkeit zu beweisen, leiten wir Formeln für α, β ab, wobei die Stelle (u,v) fortgelassen wird:

Aus * folgt (Skalarprodukt mit X_u und X_v)

$$\alpha X_u \cdot X_u + \beta X_u \cdot X_v = V \cdot X_u,$$

$$\alpha X_u \cdot X_v + \beta X_v \cdot X_v = V \cdot X_v .$$

Historische Symbolik: (nach Gauß)

$$E := E(u,v) := |X_u|^2, \quad F := F(u,v) = X_u \cdot X_v,$$

$$G := G(u,v) := |X_v|^2$$

Damit schreiben sich obige Gleichungen als

$$\left.\begin{aligned} \alpha E + \beta F &= V \cdot X_u, \\ \alpha F + \beta G &= V \cdot X_v \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{pmatrix}$$

Die (2×2) - Matrix ist regulär, denn

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix} = \mathcal{E}\mathcal{G} - |\mathcal{F}|^2 =$$

$$|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0,$$

da X_u, X_v l.u. Man kann also auflösen mit

dem Ergebnis

$$** \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{pmatrix}.$$

An dieser Darstellung von α, β liest man die Differenzierbarkeit von α, β sofort ab, denn die rechte Seite von ** hängt differenzierbar von (u,v) ab. □

Für Flächen $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sind die 3 Vektoren $X_u, X_v, X_u \times X_v$ wichtig, denn sie beschreiben

das tangentiale und normale Verhalten der Fläche.

Definition: Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die **Gauß-Abbildung** $N: \Omega \to S^2$ von X ist per Definition

$$N := X_u \times X_v \,/\, |X_u \times X_v| .$$

Das **Gauß'sche Dreibein** ist die positiv orientierte Basis (X_u, X_v, N) von $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Per Definition ist $|N| \equiv 1$, X_u und X_v haben i.a. Norm $\neq 1$, so dass (X_u, X_v, N) i.a. keine ONB ergibt.

Beispiele: 1.) **Graphenflächen**

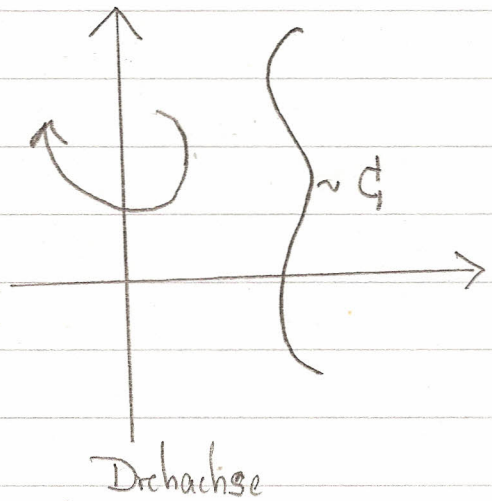
Mit $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sei $X: \Omega \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Gemäß $X_u = (1, 0, \partial_u f)$, $X_v = (0, 1, \partial_v f)$ erhalten wir

$$X_u \times X_v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial_u f \\ 0 & 1 & \partial_v f \end{pmatrix} =$$

$$-e_1 \partial_u f - e_2 \partial_v f + e_3 = (-\nabla f, 1), \text{ also}$$

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} (-\nabla f, 1)}$$ Gauß-Abbildung für Graphinflächen

2.) Rotationsflächen: Viele Flächen lassen sich dadurch erzeugen, dass man eine Kurve im Raum bewegt. Sei etwa $S \subset \mathbb{R}^3$ die Menge, die man erhält, wenn man eine reguläre ebene Kurve C um eine Achse dieser Ebene dreht, die die Kurve nicht schneidet.



Sei etwa die xz-Ebene die Ebene, in der C liegt, und C_1 schneide

die z-Achse nicht. Dann kann man die z-Achse als Rotationsachse nehmen. Es sei

$$\alpha : [a,b] \ni t \mapsto (f(t), 0, g(t)) \in \mathbb{R}^3$$

eine Parametrisierung von C. Setzt man

$$X : (0, 2\pi) \times (a,b) \ni (u,v) \mapsto$$

$$(f(v)\cos u, f(v)\sin(u), g(v)),$$

so parametrisiert X offenbar die Fläche S. Man spricht aus naheliegenden Gründen von einer Rotationsfläche. Es gilt

$$X_u = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0)$$

$$X_v = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)),$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ & X_u & \\ & X_v & \end{vmatrix} =$$

$$(f(v)\,g'(v)\cos u, g'(v)\,f(v)\sin u, -f'(v)\,f(v)),$$

$$|X_u \wedge X_v| = |f(v)| \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}.$$

Da $\mathcal{C}$ die z-Achse nicht schneidet, nimmt man o.E. an, dass $\mathcal{C}$ rechts von die z-Achse liegt, also $f(v) > 0$ gilt. Dann ergibt sich für die Gauß-Abbildung

$$N(u,v) = \frac{(g'(v)\cos u, g'(v)\sin u, -f'(v))}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}}.$$

Da wir $\mathcal{C}$ als regulär annehmen, ist $\alpha'(t) = (f'(t), g'(t)) \neq 0$, also $N(u,v)$ wohldefiniert.

Zum Abschluss dieses §en diskutieren wir, wie sich die Gaußabbildung N einer Fläche verhält, wenn man diese Fläche umparametrisiert.

<u>Satz 2</u>: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine Umparametrisierung von X. Dann gilt für die Gauß-Abbildung $\tilde{N}$ von $\tilde{X} := X \circ \varphi$:

$$\boxed{\tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \operatorname{sign} \det D\varphi(\tilde{u},\tilde{v})\ N(\varphi(\tilde{u},\tilde{v}))}, \quad (\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}.$$

Bemerkung: Man nennt φ $\left\{ \begin{array}{l} \text{orientierungserhaltend} \\ \text{-11- umkehrend} \end{array} \right\}$, falls $\det D\varphi = \left\{ \begin{array}{r} +1 \\ -1 \end{array} \right\}$ ist. Der Satz sagt, dass bei Erhalt der Orientierung unter φ die Gauß-Abbildung unverändert bleibt, man muss sie natürlich an der richtigen Stelle auswerten, also $\tilde{N} = N \circ \varphi$ (und nicht $\tilde{N} = N$!).

Beweis: Nach der Kettenregel ist

$$\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \underbrace{DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}}_{\text{totale Ableitung von } X \text{ an der Stelle } \varphi(\tilde{u},\tilde{v})} \left(\partial_{\tilde{u}} \varphi(\tilde{u},\tilde{v})\right)$$

$$= \underbrace{\left(X_u|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} \quad X_v|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} \right)}_{\text{Jacobi Matrix}} \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{u}} \varphi^1(\tilde{u},\tilde{v}) \\ \partial_{\tilde{u}} \varphi^2(\tilde{u},\tilde{v}) \end{pmatrix}$$

$$= \partial_{\tilde{u}} \varphi^1(\tilde{u},\tilde{v})\ X_u|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} + \partial_{\tilde{u}} \varphi^2(\tilde{u},\tilde{v})\ X_v|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})},$$

analog gilt

$$\widetilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \partial_{\tilde{v}} f^1(\tilde{u},\tilde{v}) X_u\big|_{f(\tilde{u},\tilde{v})} + \partial_{\tilde{v}} f^2(\tilde{u},\tilde{v}) X_v\big|_{f(\tilde{u},\tilde{v})}.$$

Man bekommt $\widetilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = |\widetilde{X}_{\tilde{u}} \times \widetilde{X}_{\tilde{v}}|^{-1} (\widetilde{X}_{\tilde{u}} \times \widetilde{X}_{\tilde{v}})(\tilde{u},\tilde{v})$,

$$\widetilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \widetilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) =$$

$$\left[\partial_{\tilde{u}} f^1(\tilde{u},\tilde{v})\, \partial_{\tilde{v}} f^2(\tilde{u},\tilde{v}) - \partial_{\tilde{u}} f^2(\tilde{u},\tilde{v})\, \partial_{\tilde{v}} f^1(\tilde{u},\tilde{v})\right] X_u \times X_v\big|_{f(\tilde{u},\tilde{v})} =$$

$$\det Df(\tilde{u},\tilde{v})\, N\big|_{f(\tilde{u},\tilde{v})},$$

also $\widetilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \operatorname{sign}(\det Df)\, N\big|_{f(\tilde{u},\tilde{v})}$.

□

§ 2 Erste und Zweite Fundamentalform parametrisierter Flächen

Bevor wir uns mit diesen geometrischen Größen befassen einige Bemerkungen über quadratische Formen: Ist T ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so versteht man unter einer symmetrischen Bilinearform β auf T eine Abbildung $\beta: T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\beta(U,V) = \beta(V,U) \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$\beta(aU+bV, W) = a\,\beta(U,W) + b\,\beta(V,W) \quad \text{(Linearität)}$$

für alle $U,V,W \in T$, $a,b \in \mathbb{R}$. Zu β gehört die quadratische Form $U \mapsto \beta(U,U)$, für die man auch das Symbol $\beta = \beta(U)$ verwendet. β heißt positiv definit, falls

$$0 \neq U \in T \Longrightarrow \beta(U) = \beta(U,U) > 0.$$

Beispiele für symmetrische Bilinearformen, die diese Bedingung erfüllen, sind alle Skalarprodukte, insbesondere auf dem $\mathbb{R}^n$ das Euklidische Skalarprodukt

$$\beta(X,Y) := X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Ist $n = \dim T < \infty$, β eine symmetrische Bilinearform auf T, und hat man eine Basis von T gewählt, die aus den Vektoren $e_1, \dots, e_n$ besteht, so gehört zu β bzgl. $(e_1, \dots, e_n)$ die Fundamentalmatrix

$$G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \quad g_{ij} := \beta(e_i, e_j).$$

Für $U = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ folgt

$$\beta(U,V) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} u_i v_j ,$$

d.h. mit G kennt man β. Wie verhält sich die Fundamentalmatrix bei einem Basiswechsel? Sei $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine weitere Basis und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Matrix des Basiswechsels, der den Übergang von $\{f_1, \dots, f_n\}$ nach $\{e_1, \dots, e_n\}$ beschreibt, d.h.

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sei schließlich $F = (f_{kl})_{1 \le k,l \le n}$ die Fundamentalmatrix von β bzgl. $\{f_1, \dots, f_n\}$, $f_{kl} := \beta(f_k, f_l)$.

Dann gilt:

$$g_{ij} = \beta\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} f_l, \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k\right) =$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{il} a_{jk} \beta(f_l, f_k) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{il} a_{jk} f_{lk},$$

anders gesagt: $G = A F A^t$

[Koeff. in Zeile i an Stelle j von $A F A^t$ =

i^{te} Zeile von A^t · $\underbrace{j^{te} \text{ Spalte von } F A^t}_{=:(\xi_{1j} \dots \xi_{nj})}$ =

$a_{il} \xi_{lj}$ (mit Summationskonvention)

$= a_{il}$ (l^{te} Zeile von F · j Spalte von A^t)

$= a_{il} f_{lk} a_{jk} \Longrightarrow (A F A^t)_{ij} = a_{il} f_{lk} a_{jk}$]

Wir betrachten noch folgende Situation: Seien S, T $\mathbb{R}$-Vektorräume, $L: S \to T$ sei linear und β_T sei eine symmetrische Bilinearform auf T. Dann gewinnt man daraus eine symmetrische Bilinearform β_S auf S vermöge $\beta_S(U,V) := \beta_T(LU, LV)$, $U, V \in S$.

Man nennt β_S die durch L von β_T induzierte Bilinearform. Ist L injektiv und β_T positiv definit, so auch β_S.

Nun zurück zur Differentialgeometrie:

Definition: 1^te Fundamentalform

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

a) An jeder Stelle $(u,v) \in \Omega$ induziert die Inklusion $T_{(u,v)}X \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ durch das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ eine symmetrische Bilinearform

auf $T_{(u,v)}X$, die man die Erste Fundamentalform, nennt, i.Z.: $I_{(u,v)}$, $g_{(u,v)}$.

Bemerkung: $I_{(u,v)}$ (im Sinne von a)) ist also einfach nur die Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts auf $T_{(u,v)}X \times T_{(u,v)}X$.

b) Die durch die lineare Abbildung

$$DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{(u,v)}X$$

und das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ induzierte symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ wird ebenfalls Erste Fundamentalform genannt, i.Z. $I_{(u,v)}$, $g_{(u,v)}$.

Was passiert in b)? Man nimmt $U, V \in \mathbb{R}^2$, transportiert diese Vektoren mit $DX_{(u,v)}$ in $T_{(u,v)}X$ und berechnet dann

$$* \quad \tilde{g}_{(u,v)}(U,V) := DX_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V),$$

also das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Links in $*$ haben wir zur Unterscheidung $\tilde{g}$ statt g geschrieben. $\tilde{g}_{(u,v)}$ definiert nun an jeder Stelle $(u,v) \in \Omega$ ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$, und schreiben wir $g_{(u,v)}\left(DX_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V)\right)$ für die rechte Seite von $*$ (vgl. a)), so besteht der Zusammenhang

$$\tilde{g}_{(u,v)}(U,V) = g_{(u,v)}\left(DX_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V)\right).$$

Nun schreibt man für die linke Seite wieder g statt $\tilde{g}$, also gilt folgende Konvention / Interpretation:

$$U, V \in \mathbb{R}^2: \quad g_{(u,v)}(U,V) = I_{(u,v)}(U,V) = DX_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V)$$

$$\tilde{U}, \tilde{V} \in T_{(u,v)}X: \quad g_{(u,v)}(\tilde{U},\tilde{V}) = I_{(u,v)}(\tilde{U},\tilde{V}) = \tilde{U} \cdot \tilde{V}.$$

Da man in die Bilinearform aus a) Vektoren mit 3 Komponenten einsetzt, in die aus b) dagegen Vektoren

aus $\mathbb{R}^2$, besteht keine Verwechslungsgefahr.

Bemerkung: 1.) In $T_{(u,v)}X$ haben wir die kanonische Basis $X_u(u,v)$, $X_v(u,v)$ bzgl. derer die Fundamentalmatrix $G_{(u,v)}$ der 1^ten Fundamentalform lautet

$$G_{(u,v)} = \begin{pmatrix} I(X_u,X_u) & I(X_u,X_v) \\ I(X_v,X_u) & I(X_v,X_v) \end{pmatrix}_{(u,v)}$$

$$= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Offenbar ist $G_{(u,v)}$ (auch) die Fundamentalmatrix von $I_{(u,v)}$ (bei Interpretation als Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$) bzgl. der kanonischen Basis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$.

2.) Teil b) der Definition interpretiert die 1^te Fundamentalform als eine parameterabhängige Schar $(u,v) \mapsto$ $I_{(u,v)} = g_{(u,v)}$, $(u,v) \in \Omega$, von Skalarprodukten (s. Satz 3) auf $\mathbb{R}^2$.

Satz 3: i) Die Erste Fundamentalform I einer Fläche $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist positiv definit. (man meint hier $I_{(u,v)}$ $\forall (u,v) \in \Omega$)

ii) $(u,v) \mapsto I_{(u,v)}$ ist differenzierbar auf Ω, d.h. die Koeffizienten $g_{ik}: \Omega \to \mathbb{R}$ der Fundamentalmatrix sind differenzierbare Funktionen.

Beweis: i) klar, wenn $I_{(u,v)}$ gemäß a) definiert wird; gemäß Definitionsvariante b) aber auch klar, da $\operatorname{rg} DX \equiv 2$, also $DX_{(u,v)}$ injektiv, und $I = DX \cdot DX$.

ii) gemäß $g_{11} = |X_u|^2$, $g_{12} = X_u \cdot X_v$, $g_{22} = |X_v|^2$ ist auch hier nichts weiter zu zeigen. □

Beispiel: 1.) **Erste Fundamentaform für Graphen**

Sei $X: \Omega \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ mit $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hier ist an jeder Stelle $(u,v) \in \Omega$

$$\begin{cases} E = X_u \cdot X_u = 1 + (\partial_u f)^2, \\ G = X_v \cdot X_v = 1 + (\partial_v f)^2, \\ F = X_u \cdot X_v = \partial_u f \, \partial_v f \end{cases}$$

und die Fundamentalmatrix der Ersten Fundamental-

form lautet

$$G = \begin{pmatrix} 1 + (\partial_u f)^2 & \partial_u f \, \partial_v f \\ \partial_u f \, \partial_v f & 1 + (\partial_v f)^2 \end{pmatrix}.$$

2.) <u>Erste Fundamentalform für Rotationsflächen</u>

Wir betrachten o.E.

$$X(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

mit $f(v) > 0$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a,b)$. Mit

$$X_u = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0),$$

$$X_v = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v))$$

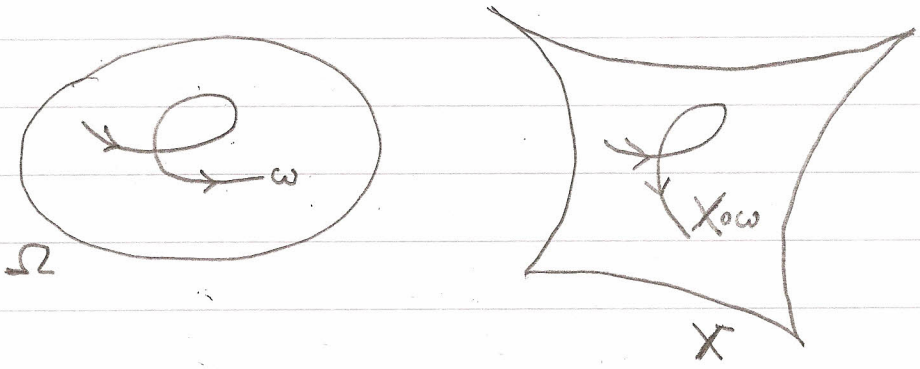
lautet die Fundamentalmatrix an einer beliebigen Stelle (u,v)

$$G_{(u,v)} = \begin{pmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Winkelvariable u geht in keiner Weise ein, was nicht überrascht.

Geometrische Interpretation der Ersten Fundamentalform:

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche; $\omega: [a,b] \longrightarrow \Omega$ differenzierbar und $\alpha := X \circ \omega$.



α ist Kurve in der Fläche X mit Länge

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt =$$

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dt} (X \circ \omega)(t) \right| dt =$$

$$\int_a^b |DX_{\omega(t)}(\omega'(t))|\,dt.$$

In $DX_{\omega(t)}(\omega'(t))$ wirkt die Ableitung $DX_{\omega(t)}$ von X an der Stelle $\omega(t)$ auf den Tangentenvektor $\omega'(t) \in \mathbb{R}^2$.

Mit $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ ist

$$DX_{\omega(t)}(\omega'(t)) = \omega_1'(t)\, X_u(\omega(t)) + \omega_2'(t) X_v(\omega(t)),$$

also gilt

$$|DX_{\omega(t)}(\omega'(t))| = \left(DX_{\omega(t)}(\omega'(t)) \cdot DX_{\omega(t)}(\omega'(t))\right)^{1/2} =$$

$$I_{\omega(t)}(\omega'(t), \omega'(t))^{1/2},$$

und man bekommt:

$$L(X \circ \omega) = \int_a^b I_{\omega(t)}(\omega'(t), \omega'(t))^{1/2}\,dt.$$

Mit der Ersten Fundamentalform können wir also die Länge der Kurve $X \circ \omega$ berechnen. Später werden wir noch sehen, was I mit Flächenmessung zu tun hat (→ p. 153).

Wir schauen uns noch an, wie sich I unter "Transformationen" verhält.

Satz 4: (Invarianz von I)

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

i) Sei $B := R + T$ mit einer Rotation R und einer Translation T. (B heißt dann eine Bewegung von $\mathbb{R}^3$.) Dann ist $\tilde{X} := B \circ X$ eine Fläche (verschoben und rotiert), und es gilt für alle $U, V \in T_{(u,v)} X$:

$$I(U,V) = \tilde{I}(R(U), R(V)).$$

ii) Sei $\varphi: \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine Parametertransformation und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt für die Erste Fundamentalform $\tilde{I}$ von $\tilde{X}$

$$\widetilde{I}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = I_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}), D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right)$$

für alle $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$.

Beweis: i) Dass mit X auch $B \circ X$ eine Fläche ist, folgt trivial, denn $D(B \circ X) = R \circ DX$, und wegen Rang $R = 3$ folgt Rang $D(B \circ X) \equiv 2$.

Außerdem gilt: $T_{(u,v)}(B \circ X) = R(T_{(u,v)} X)$.

ii) Für $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist per Definition

$$\widetilde{I}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = D\widetilde{X}|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) \cdot D\widetilde{X}|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}) =$$

$$\left[\left(DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} \circ D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}\right)(\tilde{U})\right] \cdot \left[\ldots\ldots(\tilde{V})\right] =$$

$$DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\Big(\underbrace{D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U})}_{\in \mathbb{R}^2}\Big) \cdot DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right) =$$

$$I_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}), D\varphi|_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right). \qquad \square$$

⟨Übung⟩ Hat die Parametertransformation $\varphi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ die Form $\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$, so gilt für die Fundamentalmatrizen $(\tilde{g}_{ij})$ von $\tilde{X} = X \circ \varphi$ und (g_{kl}) von X die Formel $(\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$

$$\boxed{\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}) = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}) \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}) \cdot g_{kl}(\varphi(\tilde{u}))} \; .$$

Wir wollen jetzt die <u>Zweite Fundamentalform</u> einer Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, einführen mit dem Fernziel, etwas über die Krümmung von X sagen zu können. Krümmung von X bei $(u,v) \in \Omega$ bedeutet anschaulich die Veränderung der Lage von $T_{(u,v)} X$, die man auch durch die Veränderung des Normalenvektors N messen kann. Deshalb gehen wir zurück zur Gauß-Abbildung $N : \Omega \to S^2$, $N = X_u \times X_v / |X_u \wedge X_v|$.

Es gilt

Satz 5: $\boxed{DN_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) \subset T_{(u,v)}X.}$

Interpretation: N ist eine Abbildung $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, so dass die Ableitung $DN_{(u,v)}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ darstellt. In Satz 5 steht, dass diese lineare Abbildung im Unterraum $T_{(u,v)}X$ von $\mathbb{R}^3$ hat.

Beweis: Es gilt für $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$

$$DN_{(u,v)}(w) = w_1 N_u(u,v) + w_2 N_v(u,v).$$

Nun ist $1 \equiv N \cdot N$, also

$$0 = (N \cdot N)_u = N_u \cdot N, \quad 0 = (N \cdot N)_v = N_v \cdot N.$$

Die Vektorfelder N_u, N_v sind daher orthogonal zu N, m.a.W. sie sind tangential, so dass $DN_{(u,v)}(w) \in T_{(u,v)}X$ bewiesen ist. □

Satz 6 (+ Definition): Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto -\underbrace{DN_{(u,v)}(u)}_{\in T_{(u,v)}X} \cdot \underbrace{DX_{(u,v)}(v)}_{\in T_{(u,v)}X} \in \mathbb{R}$$

ist eine <u>symmetrische Bilinearform</u> auf $\mathbb{R}^2$, genannt die <u>Zweite Fundamentalform</u> $II_{(u,v)}$ von X im Punkt $(u,v) \in \Omega$.

Beweis: Da die Ableitungen $DN_{(u,v)}$, $DX_{(u,v)}$ linear sind, ist $II_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear. Per Definition von N ist

$$X_u \cdot N = 0 = X_v \cdot N,$$

also:

$$N_v \cdot X_u = (N \cdot X_u)_v - N \cdot X_{uv} = -N \cdot X_{uv},$$

$$N_u \cdot X_v = (N \cdot X_v)_u - N \cdot X_{vu} = -N \cdot X_{uv},$$

$$N_v \cdot X_u = N_u \cdot X_v .$$

Das bedeutet für die kanonische Basis (e_1, e_2) von $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_1, e_2) = -DN_{(u,v)}(e_1) \cdot DX_{(u,v)}(e_2) =$$

$$-N_u(u,v) \cdot X_v(u,v) = -N_v(u,v) \cdot X_u(u,v) = \ldots =$$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_2, e_1),$$

womit die Symmetrie bewiesen ist. □

Wie auch für I gibt es eine andre Interpretation der Zweiten Fundamentalform: Sind $U, V \in T_{(u,v)}X$, so liegen $\left(DX_{(u,v)}\right)^{-1}(U) =: \tilde{U}, \left(DX_{(u,v)}\right)^{-1}(V) =: \tilde{V}$ in $\mathbb{R}^2$ und $\mathrm{II}_{(u,v)}(\tilde{U}, \tilde{V})$ ist wohldefiniert.

Statt $\mathrm{II}_{(u,v)}(\tilde{U}, \tilde{V})$ schreibt man

$$\boxed{\mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}(U,V) = -DN_{(u,v)}\left(\left(DX_{(u,v)}\right)^{-1} U\right) \cdot V}$$

und gewinnt mit $\mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}$ eine symmetrische

Bilinearform auf dem Tangentialraum $T_{(u,v)}X$.

Definition: Die lineare Abbildung

$$S_{(u,v)} : T_{(u,v)}X \ni \mathcal{U} \mapsto -DN_{(u,v)}\left((DX_{(u,v)})^{-1}\mathcal{U}\right) \in T_{(u,v)}X$$

des Tangentialraumes $T_{(u,v)}X$ in sich heißt die Weingarten-Abbildung der Fläche X.

Mit dieser Notation können wir schreiben

$$\mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = S_{(u,v)}(\mathcal{U})\cdot\mathcal{V}, \quad \mathcal{U},\mathcal{V}\in T_{(u,v)}X.$$

Wie sieht die Fundamintalmatrix von $\mathrm{II}_{(u,v)}$ bzgl. (e_1, e_2) aus? Es ist nach den Rechnungen zu Satz 6

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_1,e_2) = -N_u(u,v)\cdot X_v(u,v) =$$

$$-X_u(u,v)\cdot N_v(x,v) = \mathrm{II}_{(u,v)}(e_1,e_2),$$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_1,e_1) = -N_u(u,v)\cdot X_u(u,v) =$$

$$N(u,v) \cdot X_{uu}(u,v) =: \mathcal{L},$$

$$\underset{(u,v)}{\text{II}}(e_2, e_2) = -N_v(u,v) \cdot X_v(u,v) = N(u,v) \cdot X_{vv}(u,v) =: \mathcal{N}.$$

Setzt man noch

$$\mathcal{M} := -X_u(u,v) \cdot N_v(u,v) = N(u,v) \cdot X_{uv}(u,v),$$

so lautet die Fundamentalmatrix bzgl. (e_1, e_2)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \hat{=} \text{II} \quad (\text{auf } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2).$$

Man erhält dasselbe Resultat für die Fundamentalmatrix von $\overset{TX}{\text{II}}$ bzgl. der Basis X_u, X_v im Tangentialraum. (Andere Notation: (e, f, g) statt $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$)

Nach Satz 4 passiert bei Transformation mit der Ersten Fundamentalform "nichts", außer dass man natürlich die Daten (Fußpunkt, eingesetzte

Vektoren) entsprechend transformiert. Bei II ist das nicht ganz so: Die Orientierung der Transformation spielt eine Rolle!

Satz 7: Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, φ sei eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\tilde{\Omega} \to \Omega$, also $\det D\varphi > 0$. Ist $\tilde{\mathrm{II}}$ die Zweite Fundamentalform von $\tilde{X} = X \circ \varphi : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, so ist für $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$

$$(1) \quad \tilde{\mathrm{II}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = \mathrm{II}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{V}).$$

Entsprechend ist für $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{X}$ ($= T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}X$!)

$$(2) \quad \underline{\mathrm{II}}^{T\tilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U,V) = \underline{\mathrm{II}}^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U,V).$$

Ist B eine eigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^3$, also

$B = R + T$ mit einer Translation T und einer

Rotation R, für die $\det R = 1$ ist, so gilt

$$(3) \quad \mathrm{II}^{T(B\circ X)}_{(u,v)}(R(U),R(V)) = \mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}(U,V)$$

für alle $U, V \in T_{(u,v)}X$.

Bemerkung: Im Fall einer Bewegung B wie oben ist

$$T_{(u,v)}(B\circ X) = R\left(T_{(u,v)}X\right),$$

so dass links in (3) die richtigen Stellen eingesetzt werden.

Beweis: Wir beweisen exemplarisch (1), so dass man sieht, wo

$\det D\varphi > 0$ eingeht. <Übung: (2), (3)>

Per Definition ist für $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\mathrm{II}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = D\tilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) \cdot D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}),$$

wobei $\tilde{X} = X \circ \varphi$ ist und $\tilde{N}$ die Gauß-Abbildung von

$\tilde{X}$ bezeichnet, $\tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \left(\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\right)(\tilde{u},\tilde{v}) \,/\, |\ldots| .$

In Satz 2 haben wir gezeigt

$$\widetilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \operatorname{sign} \det D\varphi(\tilde{u},\tilde{v})\, N(\varphi(\tilde{u},\tilde{v})),$$

so dass in unserem Fall gilt $\widetilde{N} = N \circ \varphi$. Die Kettenregel liefert

$$D\widetilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) = DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U})\right)$$

sowie

$$D\widetilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}) = DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V})\right),$$

was nach Einsetzen sofort (1) ergibt. □

Beispiele für die Berechnung von II:

1.) Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $C \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Mit $X : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto uA + vB + C$ hat man eine parametrisierte Ebene. Es ist $N(u,v) = \dfrac{A \times B}{|A \times B|}$ Konstant, also $DN \equiv 0$ und damit $\mathrm{II} \equiv 0$.

2.) Wir parametrisieren $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ durch räumliche Polarkoordinaten

$$X(u,v) = (\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u),$$

$u \in (-\pi/2, \pi/2)$, $0 < v < 2\pi$. Dann ist

$$X_u(u,v) = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u),$$

$$X_v(u,v) = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin u \cdot \cos v & -\sin u \cdot \sin v & \cos u \\ -\cos u \cdot \sin v & \cos u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\cos v \cos^2 u, -\sin v \cos^2 u, -\sin u \cos u),$$

$$|X_u \times X_v| = (\cos^2 v \cos^4 u + \sin^2 v \cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u)^{1/2}$$

$$= (\cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u)^{1/2}$$

$$= (\cos^4 u + [1-\cos^2 u]\cos^2 u)^{1/2} = \cos u,$$

$$N(u,v) = (-\cos v \cos u, -\sin v \cos u, -\sin u).$$

Ferner $\mathrm{II} \hat{=} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$ und

$$\mathcal{L} = -N_u \cdot X_u = -(\cos v \sin u, \sin v \sin u, -\cos u) \cdot$$

$$\cdot (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$= \cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v \sin^2 u + \cos^2 u \equiv 1,$$

$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v = -(\cos v \sin u, \sin v \sin u, -\cos u) \cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$= \cos v \sin u \cos u \sin v - \sin v \sin u \cos u \cos v \equiv 0,$$

$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v = -(\sin v \cos u, -\cos v \cos u, 0) \cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$= \sin^2 v \cos^2 u + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u.$$

Also: $\mathrm{II}_{(u,v)} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$ (bzgl. Basis e_1, e_2 in $\mathbb{R}^2$)

Es ist $\mathrm{I}_{(u,v)} \hat{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$ mit

$$\mathcal{E} = |X_u|^2 = 1, \quad \mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{und}$$

$$\mathcal{G} = |X_v|^2 = \cos^2 u,$$

so dass gilt: $\mathrm{II}_{(u,v)} = \mathrm{I}_{(u,v)}$.

Hat die Sphäre den Radius $R>0$, so folgt

$$\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{R}\,\mathrm{I}_{(u,v)}$$

3.) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $X(u,v) = (u,v,f(u,v))$ die zugehörige Graphinfläche. Wir wissen

$$E = 1+f_u^2\,,\quad F = f_u f_v\,,\quad G = 1+f_v^2\,,$$

$$N = (-f_u,-f_v,1)\Big/\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,,$$

$$L = N\cdot X_{uu} = f_{uu}\Big/\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,,$$

$$M = N\cdot X_{uv} = f_{uv}\Big/\sqrt{\ldots\ldots}\,,$$

$$N = N\cdot X_{vv} = f_{vv}\Big/\sqrt{\ldots\ldots}\,,$$

wobei man $1+f_u^2+f_v^2$ ersetzt durch $EG-F^2$.

Damit folgt: ($D^2 f$ = Hesse-Matrix von f)

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,D^2 f\,.$$

(Formel für Graphinflächen)

4.) <Übung> Torus, Rotationsfläche □

Bevor wir die Zweite Fundamentalform geometrisch interpretieren, noch ein Nachtrag zur Weingarten-Abbildung

$$S_w : T_w X \to T_w X, \quad w = (u,v) \in \Omega,$$

$$S_w(U) := -DN_w\left(DX(w)^{-1} U\right)$$

der parametrisierten Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Die Symmetrie von II_w ist nämlich äquivalent zur Selbstadjungiertheit von S_w, denn

$$II_w^{TX}(U,V) = II_w^{TX}(V,U) \quad \forall U,V \in T_w X$$

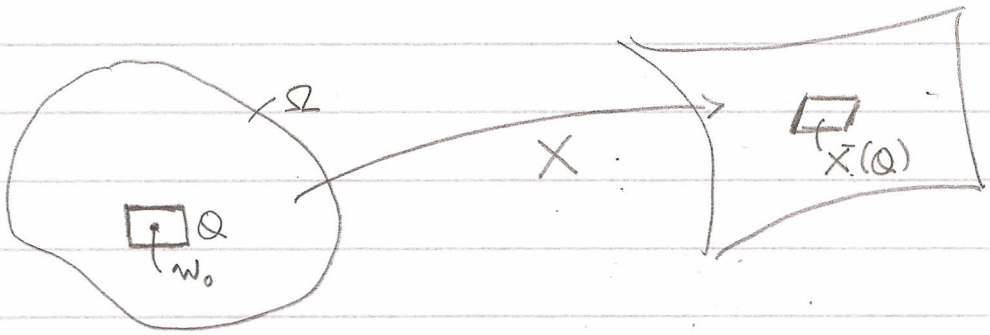
heißt ja gerade

$$S_w(U) \cdot V = S_w(V) \cdot U.$$

Um noch eine weitere geometrische Bedeutung von I zu beleuchten; überlegen wir uns mit einer Plausibilitätsbetrachtung, dass

$$A_\Omega(X) = \int_\Omega |X_u \wedge X_v| \, du\,dv$$

ein vernünftiges Maß für den Flächeninhalt der parametrisierten Fläche ergibt, vorausgesetzt $\int_\Omega \ldots < \infty$.



Man überdeckt Ω möglichst fein mit kleinen Quadraten und ersetzt X auf $Q = Q(w_0)$ durch $(u,v) \longmapsto$ $(u-u_0)X_u(w_0) + X_v(w_0)\cdot(v-v_0) + X(w_0)$. Aus Q wird ein Parallelogramm mit dem Inhalt

$$|X_u(w_0) \times X_v(w_0)| \cdot |Q(w_0)| .$$

Der Flächeninhalt von $X(\Omega)$ ist dann in guter Näherung

$$\sum_{Q(w_0)} |X_u(w_0) \times X_v(w_0)| \, |Q(w_0)| \longrightarrow \int_\Omega |X_u \times X_v| \, du\,dv,$$

wobei die Konvergenz $\longrightarrow$ " bedeutet, dass die Zerlegung von

Ω immer feiner wird soll. Das Ergebnis lautet daher:

Flächeninhalt von $X(\Omega) =$

$$\int_\Omega \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2}\, du\, dv =$$

$$\int_\Omega \sqrt{E\,g - F^2}\, du\, dv = \int_\Omega \sqrt{\det G}\, du\, dv$$

Hierin ist $G = \begin{pmatrix} E & F \\ F & g \end{pmatrix}$ die Matrix von I bzgl. der Basis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$. Zusammen mit der Rechnung von p. 138 sieht man:

Die <u>Erste Fundamentalform</u> I von X ist zuständig für die Messung von Längen und Flächeninhalten auf der Fläche X.

<u>Nun endlich zur geometrischen Bedeutung von II</u>: Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ wie immer, $\varepsilon > 0$ und $\omega: [0, \varepsilon] \to \Omega$,

$\omega(0) = w$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, eine Kurve in Ω, die die Kurve $\alpha := X \circ \omega$ auf der Fläche X induziert. Die Kurve α startet in $\alpha(0) = X(w)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\alpha'(0) = DX|_w (\omega'(0)) =$$

$$\omega_1'(0)\, X_u(w) + \omega_2'(0)\, X_v(w).$$

Für unsere Rechnungen sei α nach der Bogenlänge parametrisiert, $\alpha = \alpha(s)$. Dann ist $t(s) = \alpha'(s)$ der Einheitstangentenvektor und $\varkappa(s) = |\alpha''(s)|$ die Krümmung von α in s. Für $\varkappa(s) \neq 0$ ist der Normalenvektor $n(s)$ definiert durch die Gleichung $t'(s) = \varkappa(s)\, n(s)$. Nachfolgend sei (u_1, u_2) die Variable aus Ω, und wir benutzen Summationskonvention.

Aus

$$t(\rho) = \alpha'(\rho) = \omega_i'(\rho)\, X_{u_i}(\omega(\rho))$$

folgt

$$(1)\quad t'(\rho) = \alpha''(\rho) = \omega_i''(\rho)\, X_{u_i}(\omega(\rho)) + \omega_i'(\rho)\omega_j' X_{u_i u_j}(\omega(\rho)).$$

Wie üblich bezeichne $N: \Omega \to S^2$ die Gauß-Abbildung von X.

Man wählt $\rho = 0$ in (1) und bildet das Skalarprodukt mit $N(w) = N(\omega(0))$ (beachte $N \cdot X_{u_i} = 0$):

$$N(w)\cdot t'(0) = \omega_i'(0)\,\omega_j'(0)\, X_{u_i u_j}(w)\cdot N(w)$$

$$= \omega_i'(0)\,\omega_j'(0)\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\underbrace{\left(X_{u_j}(w)\cdot N(w)\right)}_{=0} - X_{u_j}(w)\cdot N_{u_i}(w)\right]$$

$$= -\omega_i'(0)\,\omega_j'(0)\, X_{u_j}(w)\, N_{u_i}(w)$$

$$= -DX_w(\omega'(0))\cdot DN_w(\omega'(0)) = \mathrm{II}_w(\omega'(0),\omega'(0))$$

$$= \mathrm{II}_w^{TX}(\alpha'(0),\alpha'(0)) = S_w(\alpha'(0),\alpha'(0)),$$

wo $S_w: T_w X \to T_w X$ die Weingarten-Abbildung ist und II die Zweite Fundamentalform.

Mit der Definition von $\varkappa$ und n wird daraus:

$$(2)\quad \varkappa(\sigma)\, N(w)\cdot n(\sigma) = \mathrm{II}^{TX}_{w}\left(\alpha'(\sigma),\alpha'(\sigma)\right),$$

und daraus erkennt man, dass II mit "Krümmung-zu tun hat".

Längs α definieren wir die "Vektorfelder"

$$\overline{N}(\rho) := N(\omega(\rho)),\quad \overline{n}(\rho) := \overline{N}(\rho)\times t(\rho).$$

Es gilt $\overline{n}(\rho) \in T_{\omega(\rho)}X$, dann $\overline{n}(\rho)\perp t(\rho)$ und $\overline{n}(\rho)\perp \overline{N}(\rho)$ = Erzeuger von $\left(T_{\omega(\rho)}X\right)^{\perp}$, so dass $\overline{n}(\rho)$ nicht nur tangential ist, sondern sogar mit $t(\rho)$ eine ONB von $T_{\omega(\rho)}X$ bildet:

$$T_{\omega(\rho)}X = \mathrm{span}\left[t(\rho),\overline{n}(\rho)\right]$$

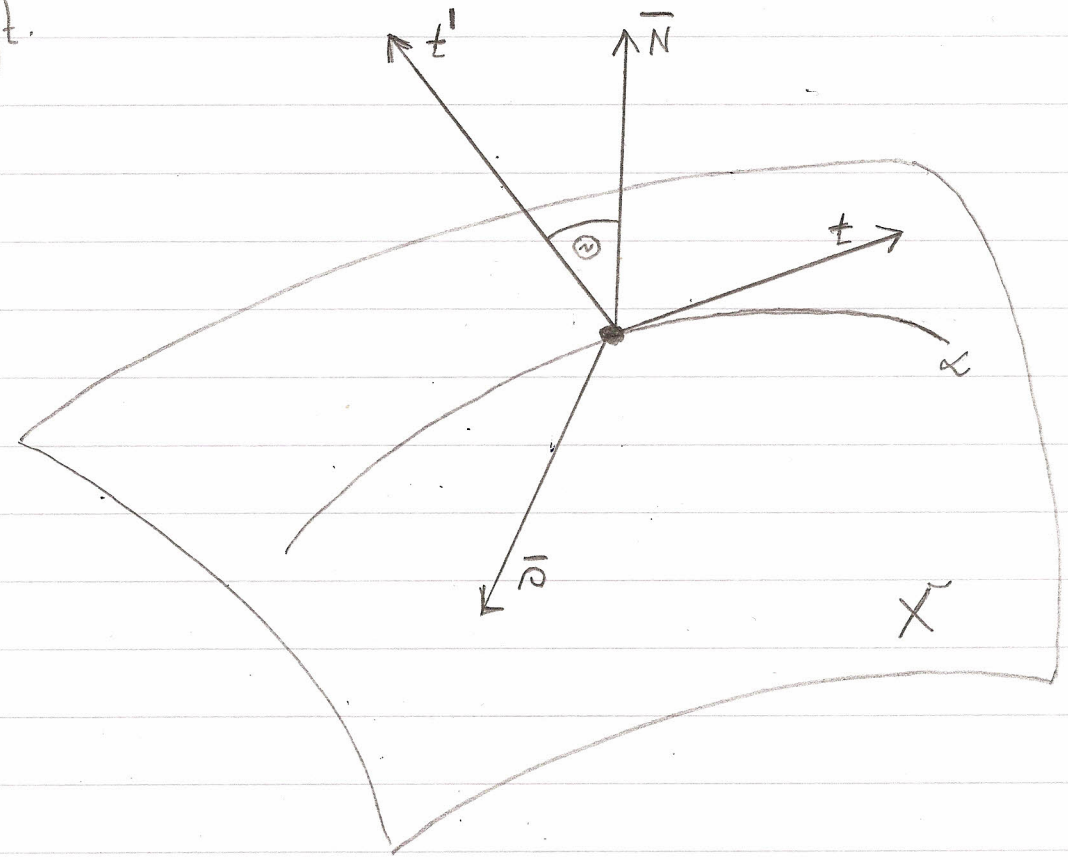
Der Vektor $t'(\rho)$ ist senkrecht zu $t(\rho)$, so dass

$$(3)\quad \boxed{t'(\rho) = \varkappa_g(\rho)\,\overline{n}(\rho) + \varkappa_n(\rho)\,\overline{N}(\rho)}$$

mit eindeutig bestimmten Skalaren $\varkappa_g(\rho)$, $\varkappa_n(\rho)$ gilt.

Offenbar ist (4) $\boxed{\varkappa_g = t' \cdot \overline{\rho}\,, \quad \varkappa_n = t'\,\overline{N}\,.}$

Die Skizze soll die Situation illustrieren. Wir haben dabei alle Vektoren - zur Vereinfachung - im Flächenpunkt $\underbrace{X(\omega(\rho))}_{=\alpha(\rho)}$ aufgehängt.



$\omega := \omega(\rho) :=$ Winkel zwischen t' und $\overline{N}$ zur Zeit ρ

$=$ Winkel zwischen $n(\rho)$ und $\overline{N}(\rho)$

Definition: Man nennt $\varkappa_g(\rho)$ bzw. $\varkappa_n(\rho)$ die geodätische Krümmung bzw. die Normalkrümmung der Kurve α in ρ.

[Do Carmo, deutsche Version p. 190]

Per Definition des Winkels Θ ist

$$\cos \Theta(p) = n(p) \cdot \overline{N}(p),$$

außerdem ergeben (3) und (4) wegen $t' = \varkappa n$

$$\varkappa = \sqrt{\varkappa_g^2 + \varkappa_n^2}.$$

Aus (3) folgt außerdem

$$\varkappa_g = t' \cdot \overline{n} = \varkappa n \cdot \overline{n} = \pm \varkappa \sin \Theta,$$

$$\varkappa_n = t' \cdot \overline{N} = \varkappa n \cdot \overline{N} = \varkappa \cos \Theta,$$

und gemäß (2) haben wir

$$(5) \qquad \boxed{\varkappa_n(0) = \mathrm{II}^{TX}_{\omega(0)}(\alpha'(0), \alpha'(0))}$$

D.h.: Fixieren wir einen Punkt w in Ω sowie einen Einheitsvektor $\xi \in T_w X$, so misst $\mathrm{II}^{TX}_w(\xi, \xi)$ die sogenannte Normalkrümmung einer Kurve α im Punkt

0, vorausgesetzt $\alpha(0) = X(w)$, $\alpha'(0) = \xi$, $\varkappa(0) > 0$ und α ist nach der Bogenlänge parametrisiert. (5) zeigt (schaue auf die rechte Seite!), dass der Wert $\varkappa_n(0)$ gar nicht davon abhängt, welche spezielle Kurve α man wählt, d.h. wir haben bewiesen

Satz 8 (von Meusnier):

Alle Kurven auf einer Fläche X, die in einem gegebenen Punkt dieselbe Tangente haben, besitzen in diesem Punkt dieselbe Normalkrümmung.

Die Krümmungen selbst müssen natürlich nicht gleich sein, der Satz stellt nur fest, dass die Eigenschaften, in der Fläche zu verlaufen und eine gemeinsame Tangente zu haben, einen Teil der Krümmung bereits festlegen.

< Übung: man diskutiere "alles" für den Fall, dass X

eine regulär parametrisierte Fläche ist $\rangle$.

Sei jetzt $\xi \in T_w X - \{0\}$ ein beliebiger Vektor, dessen Länge mit der Ersten Fundamentalform gemessen wird:

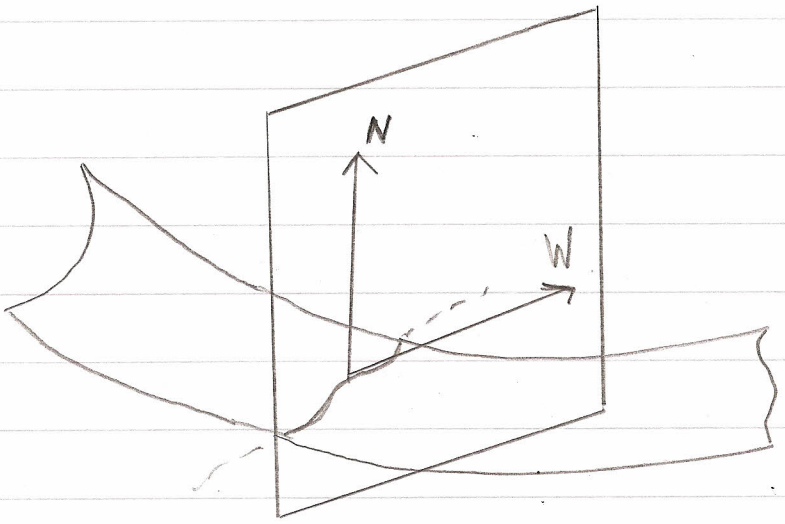
$$\|\xi\| = I_w(\xi,\xi)^{1/2}$$

Dann betrachtet man eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{\alpha}$ mit Spur auf die Fläche sowie $\tilde{\alpha}(0) = X(w)$, $\tilde{\alpha}'(0) = \xi/|\xi|$. Dann ergibt (5):

(6)
$$\boxed{\text{Normalkrümmung von } \tilde{\alpha} \text{ in } 0 \;=\; \mathrm{II}_w(\xi,\xi) \Big/ I_w(\xi,\xi)}$$

Wir betrachten folgende Situation: Sei $w \in \Omega$ fixiert sowie ein Vektor $W(w) \in T_w X$. Dazu betrachten wir die Ebene, die von $W(w)$ und $N(w)$

aufgespannt wird und durch $X(w)$ verläuft.



Sei γ der Schnitt dieser Ebene mit X, also regulär mit $\gamma(0) = X(w)$, $\gamma'(0) = W$, Spur $\gamma \subset$ Bild $X \cap$ Ebene. Offenbar ist $t'(0) = \gamma''(0)$ Vielfaches von $N(w)$, denn alle Kurventangenten liegen in der Ebene, mithin auch $t'(0)$. Es folgt:

(7) $\qquad \varkappa_g = 0 \quad$ und $\quad \varkappa_n = \pm \varkappa$,

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob $t'(0)$ und $N(w)$ gleichgerichtet sind. Eine Kurve der oben beschriebenen Art nennt man einen <u>Normalschnitt der Fläche X im Punkt $X(w)$</u>.

Gimäß (6) und (7) misst die sogenannte

$$\boxed{\text{Rayligh - Quotient} \quad \mathrm{II}_w / \mathrm{I}_w}$$

die Krümmungen aller möglichen Normalschnitte im Punkt $X(w)$, wobei in $\mathrm{II}_w / \mathrm{I}_w$ der gewählte Vektor $W \in T_w X$ einzusitzen ist. Das Vorzeichen hängt davon ab, ob $n(0) = N(w)$ oder $= -N(w)$ ist. Im nächsten Abschnitt werden wir uns für die Extremwerte des Rayligh - Quotienten interessieren, also für die größt - und kleinstmöglichen Krümmungen bei Normalschnitten.

§3 Krümmungsbegriffe für Flächen

Definition: Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche.

Die Zahlen

$$\kappa_1(w) := \min \left\{ \frac{II_w(V,V)}{I_w(V,V)} : V \in T_w X - \{0\} \right\}$$

$$= \min \{ II_w(V,V) : V \in T_w X, |V| = 1 \},$$

$$\kappa_2(w) := \max \{ II_w(V,V) : V \in T_w X, |V| = 1 \}$$

heißen die Hauptkrümmungen der Fläche X im Punkt w.

Bemerkungen: 1.) κ_1, κ_2 sind wohldefiniert, da $T_w X \ni V \mapsto II_w(V,V)$ stetig ist, und die Einheitstangentenvektoren eine kompakte Menge bilden.

2.) Mit der Weingarten-Abbildung $S_w: T_w X \to T_w X$ können wir den $II_w(V,V)$ durch $S_w(V) \cdot V$ ersetzen.

3.) Interpretation: Eine Fläche X hat in $X(w)$

zunächst nicht wie eine Kurve im Punkt w eine kanonische Krümmung. Vielmehr schaut man sich Normalschnitte der Fläche X in $X(w)$ an, ermittelt mit dem Rayleigh-Quotienten (abgesehen vom Vorzeichen) die Krümmung dieser Schnittkurven und bestimmt davon Max. und Min.

4.) Es gibt $V_1, V_2 \in T_w X$ mit Länge 1, so dass

$$\varkappa_1(w) = \mathrm{II}_w(V_1, V_1),\ \varkappa_2(w) = \mathrm{II}_w(V_2, V_2)$$

gilt.

Satz 9: Sei X eine Fläche $\Omega \to \mathbb{R}^3$, $w \in \Omega$.

a) Die Hauptkrümmungen sind genau die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung $S_w : T_w X \to T_w X$.

b) Es gibt Einheitsvektoren V_1, V_2 mit $V_1 \cdot V_2 = 0$ und $S_w(V_i) = \varkappa_i(w) V_i$. Solche Vektoren

heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Beweis: Sei $V_1 \in T_w X$ mit $|V_1| = 1$ minimal,

also $$\mathrm{II}_w(V_1, V_1) \leq \mathrm{II}_w(V,V)/\mathrm{I}_w(V,V)$$

für alle $V \in T_w X - \{0\}$. (Existenz: minimiere $\mathrm{II}_w(V,V)$ auf $|V| = 1$!) Für $|\varepsilon|$ klein genug ist $V_1 + \varepsilon V$, $V \in T_w X$, dann $\neq 0$, d.h.

$$\mathrm{II}_w(V_1, V_1) \leq \mathrm{II}_w(V_1+\varepsilon V, V_1+\varepsilon V)/\mathrm{I}_w(V_1+\varepsilon V, V_1+\varepsilon V)$$

$$\Rightarrow \quad \varkappa_1(w)\{\mathrm{I}_w(V_1,V_1) + 2\varepsilon \mathrm{I}_w(V_1,V) + \varepsilon^2 \mathrm{I}_w(V,V)\}$$

$$\leq \mathrm{II}_w(V_1,V_1) + 2\varepsilon \mathrm{II}_w(V_1,V) + \varepsilon^2 \mathrm{II}_w(V,V)$$

Es ist $\mathrm{II}_w(V_1,V_1) = \varkappa_1$, $\mathrm{I}_w(V_1,V_1) = 1$, also bekommt man $(\varkappa_1 = \varkappa_1(w))$

$$2\varepsilon \varkappa_1 \mathrm{I}_w(V_1,V) + \varepsilon^2 \varkappa_1 \mathrm{I}_w(V,V) \leq$$

$$2\varepsilon \mathrm{II}_w(V_1,V) + \varepsilon^2 \mathrm{II}_w(V,V).$$

Dividiert man durch $\varepsilon > 0$ und lässt ε gegen 0 gehen,

so folgt

$$2\kappa_1 \, I_w(V_1, V) \leq 2 \, II_w(V_1, V) \Longrightarrow$$

$$\kappa_1 \, V_1 \cdot V \leq S_w(V_1) \cdot V .$$

Dies gilt für jeden Vektor V, m.a.W.: $S_w(V_1) = \kappa_1(w) V_1$. $\kappa_1(w)$ ist Eigenwert der Weingarten-Abbildung mit zugehörigem Eigenvektor V_1. Entsprechend rechnet man nach, dass auch $\kappa_2(w)$ Eigenwert von S_w sein muss. Nun ist S_w selbstadjungiert, besitzt also in $T_w X$ eine ONB aus Eigenvektoren. Es gibt daher $V_2 \perp V_1$, $|V_2| = 1$, und $S_w(V_2) = \kappa_2(w) V_2$.

□

<u>Bemerkung</u>: Die letzte Feststellung im Beweis des Satzes gilt auch im Fall $\kappa_1(w) = \kappa_2(w)$. Dann hat der Eigenraum zu $\kappa_1(w)$ die Dimension 2, also $S_w(V) = \kappa_1(w) V$ auf $T_w X$. Gilt $\kappa_1(w) = \kappa_2(w)$,

so heißt w ein <u>Nabelpunkt der Fläche</u>. Im Fall $\varkappa_1(w) = 0 = \varkappa_2(w)$ wird w <u>Flachpunkt</u> genannt.

<u>Beispiele:</u> 1.) Für die durch $X(u,v) := R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $R>0$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $v \in (0, 2\pi)$ parametrisierte Sphäre mit Radius R haben wir gezeigt $\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{R} \mathrm{I}_{(u,v)}$, d.h. alle Punkte sind Nabelpunkte mit Hauptkrümmungen $1/R$.

2.) Für jede parametrisierte Ebene ist $\mathrm{II} \equiv 0$, alle Punkte sind (wie es sein sollte,) Flachpunkte.

3.) Flachpunkte können auch im nicht-ebenen Fall auftreten: Sei $f(u,v) = u^4 + v^4$ und $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Wir haben gezeigt:

$$\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} D^2 f \Big|_{(u,v)}$$

In $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ ist aber $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so dass

$\mathrm{II}_{(0,0)} \equiv 0$ und damit $\varkappa_1(0,0) = 0 = \varkappa_2(0,0)$.

< Übung: Berechnung von $\varkappa_1, \varkappa_2$ für weitere Bspl >

Satz 10: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist jeder Punkt $w \in \Omega$ ein Nabelpunkt, so liegt $X(\Omega)$ in einer Ebene oder in einer Sphäre.

Beweis: Sei $S_w : T_w X \to T_w X$, $w \in \Omega$, die Weingarten-Abbildung. Nach Voraussetzung ist für alle $w \in \Omega$

$$\varkappa_1(w) = \lambda(w) = \varkappa_2(w),$$

d.h. $S_w(V) = \lambda(w) V \quad \forall w \in \Omega, V \in T_w X$.

Es gilt $V = V_1 X_u(w) + V_2 X_v(w)$ und damit

$$S_w(V) = V_1 S_w(X_u(w)) + V_2 S_w(X_v(w)) =$$

$$\left(\text{Definition von } S_w\right) = -V_1 N_u(w) - V_2 N_v(w),$$

d.h.

$$\lambda(w)\left(V_1 X_u(w) + V_2 X_v(w)\right) =$$

$$-V_1 N_u(w) - V_2 N_v(w) \qquad \forall w \in \Omega,\ V_1, V_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad V_1\left(\lambda(w) X_u(w) + N_u(w)\right) +$$

$$V_2\left(\lambda(w) X_v(w) + N_v(w)\right) = 0$$

Es folgt $\circledast$ $\quad -N_u = \lambda X_u, \ -N_v = \lambda X_v$,

also $\quad (\lambda X_u)_v = (\lambda X_v)_u$. Ausrechnen

ergibt $\quad \lambda_v X_u - \lambda_u X_v \equiv 0$, und da X_u, X_v überall linear unabhängig sind, gilt $\lambda_v = \lambda_u \equiv 0$,

also $\lambda(w) \equiv \lambda$, denn Ω ist zusammenhängend.

Fall 1: $\lambda = 0$

Dann ist $N_u = N_v \equiv 0$ nach obigen Gleichungen, die

Gauß-Abbildung also konstant. Es folgt

$$(X \cdot N)_u = X_u \cdot N = 0,$$

$$(X \cdot N)_v = X_v \cdot N = 0,$$

mithin $X(w) \cdot N \equiv \text{const.}$ Es folgt $(X(w) - X(w_0)) \cdot N = 0$, so dass $X(w) - X(w_0) \in N^{\perp}$ ist. Hier ist $w_0 \in \Omega$ beliebig fixiert. Dann hat aber X Bild in der Ebene durch $X(w_0)$ senkrecht zu N.

Fall 2: $\lambda \neq 0$

Dann betrachtet man die Abbildung $(u,v) \mapsto X(u,v) + \frac{1}{\lambda} N(u,v)$.

Aus ⊛ folgt $\left(X + \frac{1}{\lambda} N\right)_u = 0 = \left(X + \frac{1}{\lambda} N\right)_v$, also

$X(u,v) + \frac{1}{\lambda} N(u,v) \equiv Y_0 \in \mathbb{R}^3$. Das ergibt

$$|X(u,v) - Y_0| = \left|\frac{1}{\lambda} N(u,v)\right| = \frac{1}{|\lambda|},$$

Bild (X) ist enthalten in der Sphäre um Y_0 mit Radius $\frac{1}{|\lambda|}$.

□

Definition: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit den Hauptkrümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2 : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann heißen

$$\boxed{H(w) := \frac{1}{2}\left(\varkappa_1(w) + \varkappa_2(w)\right), \quad K(w) := \varkappa_1(w)\varkappa_2(w)}$$

die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung der Fläche X in w.

Bemerkung: Definiert man neben

$$I_w(V,W) = V \cdot W, \quad II_w(V,W) = S_w(V) \cdot W,$$

$w \in \Omega$, $V, W \in T_w X$ noch die Dritte Fundamentalform

$III_w(V,W) := S_w(V) \cdot S_w(W)$, so gilt die Formel

$$\boxed{III - 2H\,II + K\,I \equiv 0}$$

⟨Übung: Beweis!⟩

Wir leiten Formeln für H und K ab: Seien $w = (u_1, u_2)$ die Punkte aus Ω. Es seien

$$G = (g_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le 2} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |X_{u_1}|^2 & X_{u_1}\cdot X_{u_2} \\ X_{u_1}\cdot X_{u_2} & |X_{u_2}|^2 \end{pmatrix}$$

und

$$B = (b_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le 2} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathcal{L} = N\cdot X_{u_1u_1},\ \mathcal{M} = N\cdot X_{u_1u_2},\ \mathcal{N} = N\cdot X_{u_2u_2} \right)$$

die Fundamentalmatrizen von I und II bzgl. e_1, e_2 (oder X_u, X_v). G ist invertierbar mit

$$G^{-1} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix},\ W := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2.$$

Die Ableitungen $N_{u_1}(w)$, $N_{u_2}(w)$ der Gauß-Abbildung liegen in $T_w X$ (, denn $N\cdot N = 1 \Longrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial u_i}(N\cdot N)$ $= 2\, N_{u_i}\cdot N$, so dass $N_{u_i}(w) \in N(w)^{\perp} = T_w X$.), und da $X_{u_1}(w)$, $X_{u_2}(w)$ eine Basis von $T_w X$ ist, gibt

es eindeutige Koeffizientenfunktionen $a_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta(w)$ mit

$$(1) \qquad N_{u_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad \alpha = 1,2.$$

Es folgt:

$$N_{u_\alpha} \cdot X_{u_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta X_{u_\beta} \cdot X_{u_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma},$$

auf der linken Seite steht aber gerade $-b_{\alpha\gamma}$, d.h.

$$-b_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2} a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma}$$

Schreibt man $G^{-1} = (g^{ik})_{1\le i,k\le 2}$, so folgt:

$$-\sum_{\gamma=2}^{2} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\nu} =$$

$$\sum_{\gamma=2}^{2} \sum_{\beta=2}^{2} a_\alpha^\beta \cdot g_{\beta\gamma} g^{\gamma\nu} = a_\alpha^\nu.$$

Damit haben wir die Koeffizienten a_α^β aus (1) mit G und B ausgerechnet und die Weingarten-Gleichung

$$(2) \qquad \boxed{N_{u_\alpha} = -\sum_{\beta}^{2} b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad b_\alpha^\beta := \sum_{\gamma=1}^{2} b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}}$$

abgeleitet. Nach Satz 9 sind die Hauptkrümmungen die Eigenwerte von $S_w : T_w X \to T_w X$. Mit $V = \sum_{\alpha=1}^{2} V_\alpha X_{u_\alpha}(w)$, $W = \sum_{\alpha=1}^{2} W_\alpha X_{u_\alpha}(w) \in T_w X$ gilt:

(3) $S_w V = \varkappa V \iff S_w V \cdot W = \varkappa V \cdot W \quad \forall W \in T_w X$,

und per Definition von S_w ist

$$S_w(V) = \sum_{\alpha=1}^{2} S_w\left(X_{u_\alpha}(w)\right) V_\alpha =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} S_w\left(DX|_w(e_\alpha)\right) V_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^{2} V_\alpha N_{u_\alpha}(w),$$

so dass (3) übergeht in

$$S_w V = \varkappa V \iff$$

$$\forall\, W_1, W_2 \in \mathbb{R}: \begin{cases} -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) = \varkappa \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta X_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w). \\ \iff -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) = \varkappa \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} V_\alpha W_\beta g_{\alpha\beta}(w) \\ \iff + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b_{\alpha\beta}(w) V_\alpha W_\beta = \varkappa \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}(w) V_\alpha W_\beta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\alpha=1}^{2} b_{\alpha\beta}(w)\, V_\alpha = \varkappa \sum_{\alpha=1}^{2} g_{\alpha\beta}(w)\, V_\alpha}$$

Wegen der Symmetrie von G und B ist die Eigenwertgleichung $S_w V = \varkappa V$ äquivalent zum System

$$B\,\tilde{V} = \varkappa\, G\,\tilde{V}\,, \quad \tilde{V} = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2,$$

bzw. zu

$$(G^{-1}B)\,\tilde{V} = \varkappa\,\tilde{V},$$

so dass man zur Berechnung der Eigenwerte $\varkappa = \varkappa_1(w)$, $\varkappa_2(w)$ die Nullstellen des Polynoms

$$\boxed{\lambda \mapsto \det\left(G^{-1}B - \lambda\,\mathbb{1}\right), \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

zu bestimmen hat. Somit ist gezeigt:

Satz 11: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die Hauptkrümmungen $\varkappa_1(w)$, $\varkappa_2(w)$ von X in $w \in \Omega$ sind die Nullstellen von $\lambda \mapsto \det(G^{-1}B - \lambda\,\mathbb{1})$, wobei

G = Matrix von I, B = Matrix von II (jeweils in w).

Es gilt:

(4)
$$K = \varkappa_1 \varkappa_2 = \det\left(G^{-1}B\right) \underset{(2)}{=} \det\left(b_\alpha^\beta\right),$$
$$H = \frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}\left(G^{-1}B\right) \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(b_1^1 + b_2^2\right).$$

Insbesondere erkennt man, dass K und H durch die Koeffizienten b_α^β der Weingarten-Gleichung (2) bestimmt werden. Mit der Formel für G^{-1} gilt

$$G^{-1}B = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{W}\begin{pmatrix} \mathcal{G}\mathcal{L} - \mathcal{F}\mathcal{M} & \mathcal{G}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{N} \\ -\mathcal{F}\mathcal{L} + \mathcal{E}\mathcal{M} & -\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{E}\mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad W := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2,$$

also
$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\left(\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M}\right),$$
$$K = \frac{1}{\det G}\det B = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}.$$

Dies sind explizite Formeln für die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung von X in w in Termen der Koeffizienten der Fundamentalmatrizen von I_w und II_w.

Die Gauß-Krümmung erlaubt folgende Interpretation, die von Gauß ursprünglich als Definition gewählt wurde:

Mit den Weingarten-Gleichungen (2) ist

$$N_{u_1} \times N_{u_2} = \left(\sum_{\beta=1}^{2} b_1^\beta X_{u_\beta}\right) \times \left(\sum_{\gamma=1}^{2} b_2^\gamma X_{u_\gamma}\right)$$

$$= \left(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1\right) X_{u_1} \times X_{u_2}$$

$$\underset{(4)}{=} K\, X_{u_1} \times X_{u_2}.$$

Sei $w_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon := \{w \in \Omega : |w - w_0| < \varepsilon\}$

Die Fläche $X(\Omega_\varepsilon)$ hat den Inhalt

$$A_{\Omega_\varepsilon}(X) = \int_{\Omega_\varepsilon} |X_{u_1} \wedge X_{u_2}|\, du_1\, du_2.$$

Nun interpretiert man die Gauß-Abbildung N

als Fläche : Ist z.B. $K(w_0) \neq 0$, so auch $K \neq 0$

für $\varepsilon << 1$, so dass gemäß N_{u_1}, N_{u_2} wegen

$\circledast$ $N_{u_1} \times N_{u_2} = K X_{u_1} \times X_{u_2} \neq 0$ linear unabhängig sind,

was die Interpretation rechtfertig. Für den Inhalt von

$N(\Omega_\varepsilon)$ folgt:

$$A_{\Omega_\varepsilon}(N) = \int_{\Omega_\varepsilon} |N_{u_1} \times N_{u_2}| \, du \, dv = \int_{\Omega_\varepsilon} |K| \, |X_{u_1} \wedge X_{u_2}| \, du_1 du_2 ,$$

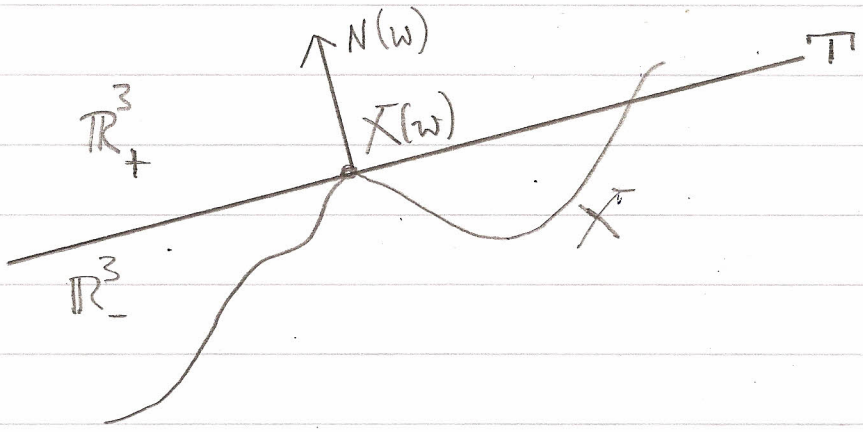
also

$$|K(w_0)| = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A_{\Omega_\varepsilon}(N) \Big/ A_{\Omega_\varepsilon}(X) .$$

Ist $K \neq 0$ auf Ω_ε, so ist die Flächennormale $\overline{N} := \dfrac{N_{u_1} \times N_{u_2}}{|N_{u_1} \times N_{u_2}|}$ wohldefiniert (vgl. $\circledast$), und es gilt (wieder $\circledast$) $\overline{N} = N$, falls $K > 0$, $\overline{N} = -N$, falls $K < 0$. Man nennt $N : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ das sphärische Bild von X.

Mit Hilfe der Krümmungsbegriffe wollen wir nun das lokale Verhalten von Flächen etwas näher diskutieren. Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $w \in \Omega$ sei fixiert. Mit T bezeichnen wir die (affine!) Tangentialebene an X in $X(w)$, also

$$T = X(w) + T_w X.$$



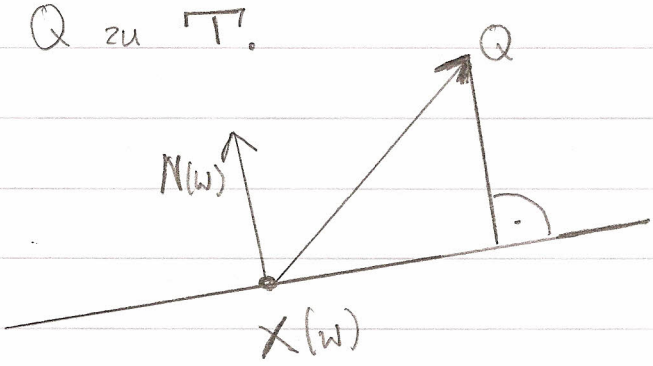
T zerlegt $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume $\mathbb{R}^3_+$, $\mathbb{R}^3_-$, $\mathbb{R}^3_+$ sei derjenige Teil, in den $N(w)$ hineinzeigt, also

$$\mathbb{R}^3_+ := \{ Q \in \mathbb{R}^3 : (Q - X(w)) \cdot N(w) \geq 0 \}$$

Für $Q \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\delta(Q) := (Q - X(w)) \cdot N(w)$$

der orientierte Abstand von Q zu T.



Wir wollen

$$\delta(\underbrace{X(w+h)}_{=:Q})$$

ausrechnen für $h = (h_1, h_2)$, $|h| << 1$. Nach Taylor ist

$$\delta(Q) = \big(X(w+h) - X(w)\big) \cdot N(w) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} X_{u_\alpha}(w)\, h_\alpha \cdot N(w) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} X_{u_\alpha u_\beta}(w)\, h_\alpha h_\beta \cdot N(w) + R(h)$$

mit $|h|^{-2} R(h) \longrightarrow 0$ bei $h \to 0$. Gemäß

$$X_{u_\alpha}(w) \cdot N(w) = 0 \,, \quad \alpha = 1, 2,$$

folgt:

$$\delta(X(w+h)) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta}^{2} X_{u_\alpha u_\beta}(w)\, h_\alpha h_\beta \cdot N(w) + R(h).$$

Sei $V_h := \sum_{\alpha=1}^{2} h_\alpha X_{u_\alpha}(w) \in T_w X$. Es ist

$$\mathrm{II}(V_h, V_h) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_\alpha h_\beta \, \mathrm{II}(X_{u_\alpha}(w), X_{u_\beta}(w)) =$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_\alpha h_\beta \, N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) =$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_\alpha h_\beta \, N(w) \cdot X_{u_\alpha u_\beta}(w),$$

Zusammen:

$$(5) \quad \delta(X(w+h)) = \frac{1}{2}\mathrm{II}(V_h, V_h) + R(h).$$

Feststellung: Die Größe $\frac{1}{2}\mathrm{II}(V_h, V_h)$ misst die Höhe mit Orientierung des Punktes $X(w+h)$ über der affinen Tangentialebene T (bis auf Fehlerterme der Ordnung > 2 bei $h \to 0$.) Damit haben wir nochmals eine andere Interpretation von II.

Definition: Ein Flächenpunkt $X(w)$, $w \in \Omega$, heißt

elliptisch	parabolisch	hyperbolisch, falls
$K(w) > 0$	$K(w) = 0$	$K(w) < 0$ ist.

Sei z.B. $K(w) > 0$: Dann gilt

$$\varkappa_1(w) > 0 \text{ und } \varkappa_2(w) > 0 \qquad (a)$$

oder

$$\varkappa_1(w) < 0 \text{ und } \varkappa_2(w) < 0 \qquad (b)$$

nach Definition der Gauß-Krümmung. Im Fall (a) ist II positiv definit, so dass aus der Entwicklung (5) folgt, dass die Fläche lokal bei w in $\mathbb{R}^3_+$ verläuft. Gilt (b), so ist II negativ definit, also $\delta \leq 0$, d.h. X liegt lokal bei w in $\mathbb{R}^3_-$. Anders gesagt: <u>In einem elliptischen Punkt verläuft die Fläche lokal ganz auf einer Seite der affinen Tangentialebene.</u>

Die Punkte einer Sphäre sind alle elliptisch. Ist $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, f(u_1,u_2))$ eine Graphenfläche, so gilt

$$K = \frac{f_{u_1u_1} f_{u_2u_2} - (f_{u_1u_2})^2}{(1+f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2)^2}.$$

Sei speziell $f(u_1,u_2) := u_1^2 + u_2^2$. Dann ist $K > 0$, also sind auch hier alle Punkte elliptisch.

Ist $K(w) < 0$, so ist II_w indefinit, und nach (5) gilt für jede Umgebung U von $X(w)$

$$U \cap \mathrm{Bild}\, X \cap \mathbb{R}^3_+ \neq \emptyset \neq U \cap \mathrm{Bild}\, X \cap \mathbb{R}^3_-.$$

Man zeige mit obiger Formel, dass für $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_2^2 - u_1^2)$ $X(0,0)$ ein hyperbolischer Punkt von X ist.

In parabolischen Punkten $K(w) = 0$ sind beide

Fälle möglich : die Fläche kann lokal bei $X(w)$ auf einer Seite von T bleiben oder aber die affine Tangentialebene beliebig oft durchschneiden. Der erste Fall tritt ein bei $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_1^4 + u_2^4)$, der zweite Fall bei $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_1^4 - u_2^4)$ jeweils in $(0,0)$, denn $X_1(0,0) = 0 = X_2(0,0)$.

< Übung: weitere Beispiele für die Klassifikation von Punkten >

Auf Flächen gibt es gewisse ausgezeichnete Kurven, denen wir uns jetzt widmen:

Definition : Eine glatte Kurve $\gamma := X \circ \omega$ mit $\omega : \mathbb{R} \supset I \to \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ heißt eine geodätische Kurve auf X (kurz: Geodätische), falls

ihre geodätische Krümmung $\varkappa_g$ verschwindet.
($\Leftrightarrow$ $n(\sigma) \parallel N(\omega(\sigma))$, da $\varkappa_g^2 + \varkappa_n^2 = \varkappa^2$, $\varkappa_n := \varkappa n \cdot N$)
γ heißt <u>Asymptotenlinie</u>, falls die Normalkrümmung

$\varkappa_n$ verschwindet. ($\Leftrightarrow$ $n(\sigma) \perp N(\omega(\sigma))$)

<u>Bemerkungen</u>: 1.) Geodätische Kurven sind (lokal) kürzeste Verbindungslinien auf der Fläche (s. später).

2.) Es ist

$$\varkappa_n = \mathrm{II}_\omega(\gamma', \gamma') \big/ \mathrm{I}_\omega(\gamma', \gamma'),$$

so dass bei regulärer Parametrisierung ($\gamma' \neq 0$) gilt:

$$\varkappa_n \equiv 0 \iff \mathrm{II}_\omega(\gamma', \gamma') \equiv 0 \iff$$

$$(6) \quad \mathcal{L}(\omega)(\omega_1')^2 + 2\,M(\omega)\omega_1'\omega_2' + N(\omega)(\omega_2')^2 \equiv 0$$

Für (6) kann man alternativ schreiben

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \cdot (\omega_1', \omega_2') = 0$$

Sei etwa $K = \varkappa_1(\omega) \cdot \varkappa_2(\omega) > 0$ auf Ω. Mit

die Weingarten-Abbildung $S_\omega : T_\omega X \to T_\omega X$ ist

$$\mathrm{II}_\omega(\gamma', \gamma') = S_\omega(\gamma') \cdot \gamma' ,$$

so dass im Falle einer Asymptotenlinie γ gilt

$$\begin{aligned} 0 = S_\omega(\gamma') \cdot \gamma' &= S_\omega(\lambda V_1 + \mu V_2) \cdot (\lambda V_1 + \mu V_2) \\ &= (\varkappa_1 \lambda V_1 + \varkappa_2 \mu V_2) \cdot (\lambda V_1 + \mu V_2) \\ &= \varkappa_1 \lambda^2 + \varkappa_2 \mu^2 , \end{aligned}$$

wobei V_1, V_2 jeweils eine ONB in $T_\omega X$ ist mit $S_\omega V_i = \varkappa_i V_i$, und wir $\gamma' = \lambda V_1 + \mu V_2$ geschrieben haben. $K > 0$ heißt aber $\varkappa_1 > 0$ und $\varkappa_2 > 0$ bzw. $\varkappa_1 < 0$ und $\varkappa_2 < 0$, so dass $\lambda = \mu = 0$ folgen muss im Widerspruch zu $\gamma'(t) \neq 0$. Damit ist gezeigt:

> Ist $K > 0$ auf Ω, so hat (6) keine Lösung, es gibt keine Asymptotenlinien auf X.

Umgekehrt überlegt man sich:

> Ist $K < 0$ auf Ω, so gibt es zu jedem $w \in \Omega$ genau zwei Asymptotenlinien durch $X(w)$.

< Übung: 1.) Beweis 2.) Diskussion von Asymptotenlinien an Beispielen >

Definition: Eine Kurve $\gamma = X \circ \omega$ heißt Krümmungslinie auf X, falls jedes Tangentenvektor $\gamma'(t)$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, falls also gilt

$$(7) \qquad S_{\omega(t)}(\gamma'(t)) = k(t)\,\gamma'(t)$$

mit $k(t) = \varkappa_1(\omega(t))$ oder $k(t) = \varkappa_2(\omega_2(t))$.

Schreibt man $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, so lautet (7)

$$\underbrace{S_{\omega(t)}\left(DX_{|\omega(t)}(\omega'(t))\right)}_{= -N_{u_1}(\omega(t))\omega_1'(t) - N_{u_2}(\omega(t))\omega_2'(t)} = k(t)\,\frac{d}{dt}(X \circ \omega)(t).$$

m.a.W. : Krümmungslinien $X = \gamma \circ \omega$ erfüllen

$$(8) \qquad -\frac{d}{dt}(N \circ \omega)(t) = k(t)\,\frac{d}{dt}(X \circ \omega)(t)$$

Nun kann man links die Weingarten-Gleichungen (2) benutzen, also

$$N_{u_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{2} b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad b_\alpha^\beta := \sum_{\gamma=1}^{2} b_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta},$$

mit $(b_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$; $(g^{\gamma\beta}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$

als Fundamentalmatrizen von II bzw. I.

Damit gilt ($E, F, G, \ldots = E(\omega), F(\omega), G(\omega), \ldots$)

$$-\frac{d}{dt}(N \circ \omega) = -DN_\omega(\omega') =$$

$$-N_{u_1}(\omega)\,\omega_1' - N_{u_2}(\omega)\,\omega_2' =$$

$$\omega_1' \sum_{\beta=1}^{2} b_1^\beta X_{u_\beta}(\omega) + \omega_2' \sum_{\beta=1}^{2} b_2^\beta X_{u_\beta}(\omega) =$$

$$\left(\omega_1' b_1^1 + \omega_2' b_2^1\right) X_{u_1}(\omega) +$$

$$\left(\omega_1' b_1^2 + \omega_2' b_2^2\right) X_{u_2}(\omega),$$

während man auf die rechten Seite von (8)

$$k\,\omega_1' X_{u_1}(\omega) + k\,\omega_2' X_{u_2}(\omega)$$

bekommt. Vergleich ergibt:

$$b_1^1 \omega_1' + b_2^1 \omega_2' = k\,\omega_1',$$

$$b_1^2 \omega_1' + b_2^2 \omega_2' = k\,\omega_2'.$$

Nun multipliziert man Zeile 1 mit ω_2', Zeile 2 mit $-\omega_1'$ und addiert die Ergebnisse. Es folgt:

$$-b_1^2 (\omega_1')^2 - b_2^2 \omega_1' \omega_2' + b_1^1 \omega_1' \omega_2' + b_2^1 (\omega_2')^2 \equiv 0.$$

Nun setzt man die Werte für b_α^β ein und multipliziert mit $-W^2 = \mathcal{F}^2 - \varepsilon\,\mathcal{G}$:

$$(\varepsilon M - \mathcal{F} L)(\omega_1')^2 + (\varepsilon N - \mathcal{G} L)\omega_1' \omega_2' +$$

$$(\mathcal{F} N - \mathcal{G} M)(\omega_2')^2 \equiv 0$$

oder

$$\det \begin{pmatrix} (\omega_2')^2 & -\omega_1'\omega_2' & (\omega_1')^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \equiv 0 \quad .$$

Beispiele: 1.) Berechnung von Gauß'scher und mittlerer Krümmung für Graphen $X:(u,v) = (u,v,f(u,v))$: Hier ist

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix} ,$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} ,$$

so dass

$$K = \det\left(G^{-1}B\right) = \frac{1}{\det G} \det B = \frac{1}{1+f_u^2+f_v^2} \det B = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}$$

Entsprechend folgt aus

$$G^{-1}B = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}^3} \begin{pmatrix} 1+f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1+f_u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}:$$

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(G^{-1}B\right) = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}^3}\Big[(1+f_v^2)f_{uu} - f_u f_v f_{uv}\cdot 2 + (1+f_u^2)f_{vv}\Big]\cdot\frac{1}{2}$$

Flächen mit $H \equiv 0$ heißen <u>Minimalflächen</u>. Die Graphenfläche ist also genau dann eine Minimalfläche, wenn f die Minimalflächengleichung

(MFG) $$\boxed{(1+f_v^2)\,f_{uu} - 2\,f_{uv}\,f_u f_v + (1+f_u^2)\,f_{vv} \equiv 0}$$

erfüllt. Das ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für f, die auch durch

$$\mathrm{div}\left(\nabla f \Big/ \sqrt{1+|\nabla f|^2}\right) \equiv 0$$

ersetzt werden kann.

2.) H und K für Rotationsflächen

$$X(u,v) = (f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v)) :$$

Es ist $\quad E = f^2,\ F = 0,\ G = (f')^2 + (g')^2,$

$$L = -fg'/\sqrt{G},\quad M = 0,\quad N = (f''g' - g''f')/\sqrt{G},$$

wobei man

$$N(u,v) = (X_u \times X_v)/|X_u \times X_v| =$$

$$(g'\cos u,\ g'\sin u,\ -f')/\sqrt{G}$$

benutzt zur Berechnung von L, M, N. Damit folgt

$$G^{-1}B = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{f^2 G}\begin{pmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{fg'}{\sqrt{G}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}}(f''g' - g''f') \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \underbrace{\frac{1}{f^4 G^2}\ f^2\left((f')^2 + (g')^2\right)}_{= \det G^{-1}}\left[-\frac{fg'}{\sqrt{G}}\right](f''g' - g''f')$$

$$= -\frac{1}{f g^2}\, g' \left(f'' g' - f' g'' \right) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{K = \frac{1}{g^2}\left[-\frac{g'(f''g' - f'g'')}{f} \right], \quad g = (f')^2 + (g')^2}$$

Entsprechend liefert $\frac{1}{2}$ Spur $(G^{-1}B)$ die mittlere Krümmung:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{f^2 g}\left[-\frac{f g'}{\sqrt{g}}\left((f')^2 + (g')^2 \right) + f^2 \frac{1}{\sqrt{g}}\left(f'' g' - f' g'' \right) \right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{g'}{f} + \frac{f'' g' - f' g''}{g} \right]}$$

Ist die Kurve $v \mapsto (f(v), g(v))$ <u>nach der Bogenlänge</u> <u>parametrisiert</u>, so gilt: $f'(v)^2 + g'(v)^2 = g(v) \equiv 1$

Es folgt: $f' f'' = -g' g''$, also in diesem Fall:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{-g' + f(f'' g' - f' g'')}{f},$$

$$K = -\frac{g'}{f}\left(f'' g' - f' g'' \right) = -\frac{1}{f}\left(f'' (g')^2 - f' g' g'' \right) =$$

$$-\frac{1}{f}\left(f''(g')^2 + f''(f')^2\right) = -\frac{f''}{f}.$$

Gilt für eine Fläche X $\underline{\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0}$, so ist

$$G^{-1}B = \frac{1}{\varepsilon g}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{L}/\varepsilon & 0 \\ 0 & \mathcal{N}/g \end{pmatrix},$$

d.h. die beiden Hauptkrümmungen sind $\boxed{\mathcal{L}/\varepsilon \text{ und } \mathcal{N}/g.}$

Für eine Rotationsfläche mit $(f')^2 + (g')^2 = 1$ heißt das:

$$\{\varkappa_1, \varkappa_2\} = \{-g'/f,\ f''g' - g''f'\}.$$

Eine weitere Konsequenz von $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$ bei Rotationsflächen ist, dass

$u \mapsto X(u,v)$, v fest,

$v \mapsto X(u,v)$, u fest,

Krümmungslinien sind: Sei etwa $v = v_0$ fest, $\omega(u) := (u, v_0)$.

Dann haben wir die Koordinatenkurve $\gamma(u) := (X \circ \omega)(u)$,

und diese ist Krümmungslinie, falls

$$\det \begin{pmatrix} (\omega_2')^2 & -\omega_1'\omega_2' & (\omega_1')^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = 0$$

ist. Hier hat die Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{E} & 0 & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & 0 & \mathcal{N} \end{pmatrix},$$

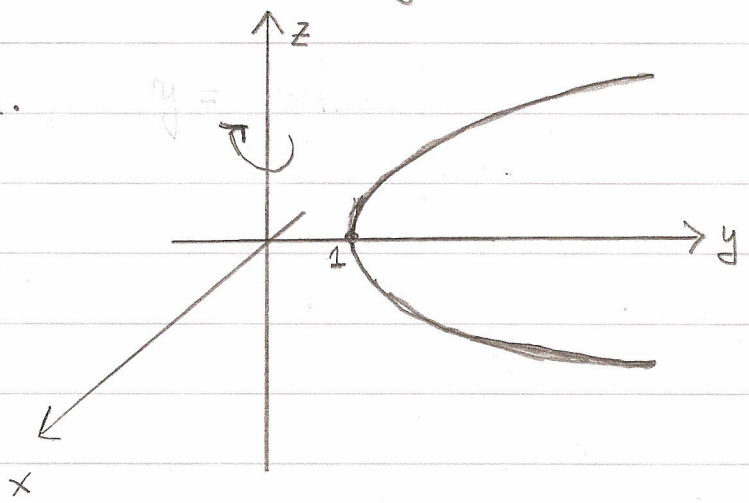
so dass $\det(\dots) = 0$ klar ist. Für die andere Koordinatenlinie gilt dasselbe Argument.

3.) Zwei klassische Minimalflächen

A.) Das Katenoid (Kettenfläche) entsteht als

Rotationsfläche $X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$,

Wenn man die Kurve $y = \cosh z$ um die z-Achse rotiert.



Hier ist es also so, dass man Punkte $(0, \cosh v, v)$ betrachtet und diese um die z-Achse dreht. Mit der üblichen Notation ist $f(v) = \cosh v$, $g(v) = v$, die Formeln aus Beispiel 2.) ergeben

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{g'}{f} + \frac{f''g' - g''f'}{g}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{1}{\cosh v} + \frac{\cosh v}{g}\right],$$

$$g = X_v \cdot X_v = \left|(\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)\right|^2$$

$$= 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v,$$

also $H = \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh v}\left[-\frac{1}{\cosh v} + \frac{1}{\cosh v}\right] \equiv 0$,

das Katenoid ist per Definition eine Minimalfläche.

Für die Hauptkrümmungen findet man

$$\varkappa_1 = -1/\cosh^2 v = -\varkappa_2,$$

die Gauß-Krümmung errechnet sich daraus zu $K = -(\cosh v)^{-4}$.

B.) <u>Das Helikoid</u> (= <u>Schraubenfläche</u>, <u>Wendelfläche</u>) entsteht, wenn man die Helix $(\cos u, \sin u, u)$ nimmt und durch jeden Punkt auf der Helix eine Gerade parallel zur xy-Ebene zieht, die die z-Achse schneidet. Das Helikoid wird durch diese Geraden erzeugt, eine Parametrisierung ist

$$X(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$$

mit $X_u = (-v\sin u, v\cos u, 1)$, $X_v = (\cos u, \sin u, 0)$,

$N = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(-\sin u, \cos u, -v)$. Daraus folgt $H \equiv 0$. <Übung>

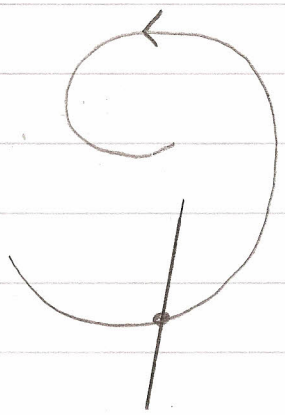
§4 Spezielle Klassen von Flächen

I. Regelflächen (ruled surfaces)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve. Seien weiter ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ gegeben und eine glatte Abbildung $w: I \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Dann ist

$$J \ni u \mapsto \alpha(t) + u\, w(t)$$

bei festem t die Parametrisierung des Teiles einer Geraden, die im Fall $u = 0 \in J$ durch den Kurvenpunkt $\alpha(t)$ geht mit Richtung $w(t)$.



Setzt man

(1)
$$X(t,u) := \alpha(t) + u\, w(t), \qquad t \in I,\ u \in J,$$

so hat man die Vorstellung, dass X diejenige Fläche beschreibt, die durch Vereinigung all dieser Geradenstücke entsteht.

Definition: Eine reguläre Fläche, die durch eine Parametrisierung der Form (1) entsteht, heißt Regelfläche.

Es gilt $X_t(t,u) = \alpha'(t) + u\, w'(t)$, $X_u(t,u) = w(t)$, und bei einer regulären Fläche müssen daher $\alpha'(u) + u\, w'(t)$, $w(t)$ für alle $(t,u) \in I \times J$ linear unabhängig sein. Wir wollen aber nachfolgend diese Bedingung nicht immer stellen, sondern die beschreibende Gleichung (1) einfach als Definition nehmen.

Beispiel 1: Tangentenfläche

Sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

Man setzt $J = (0,\infty)$ oder $= (-\infty, 0)$ sowie

$$\boxed{X^{\pm}(t,u) := \alpha(t) + u\,\alpha'(t), \quad t \in I,\ u \in J}$$

Hier ist also $w(t) = \alpha'(t)$ gewählt. Es gilt

$$X^{\pm}_t(t,u) = \alpha'(t) + u\,\alpha''(t), \quad X^{\pm}_u(t,u) = \alpha'(t),$$

also:

$$X^{\pm}_t \times X^{\pm}_u = u\,\alpha''(t) \times \alpha'(t).$$

Wir haben für die Krümmung von α gezeigt:

$$\varkappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Setzt man also $\varkappa_\alpha > 0$ auf I voraus, so folgt, dass die Tangentenflächen zumindest lokal reguläre Flächen gemäß unserer Definition sind. (Beachte: $u = 0 \in J$!)

Beispiel 2 Helikoid

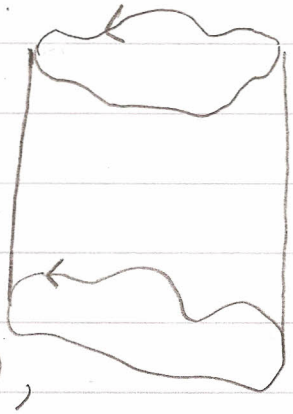
⟨Übung⟩ Das Helikoid kann als Regelfläche

$X(t,u) = \alpha(t) + u\, w(t)$ geschrieben werden mit

$\alpha(t) = (0,t,0)$, $w(t) = (1,0,\tan t)$. Im übrigen ist das Helikoid die einzige - nicht ebene - Regelfläche, die auch Minimalfläche ist.

3.) <u>Verallgemeinerter Zylinder über einer Kurve</u>

Sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eine (geschlossene?) ebene Kurve ohne Selbstdurchschneidungen, o.E. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$,



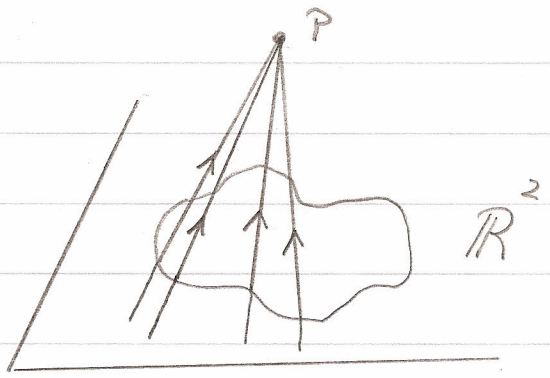
und $w \equiv (0,0,1)$. Dann heißt

$$X(t,u) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), u)$$

der verallgemeinerte Zylinder über α.

4.) Sei $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ wie in 3.) und $P \in \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ ein fixierter Punkt.

Mit $w(t) := p - \alpha(t)$ sei



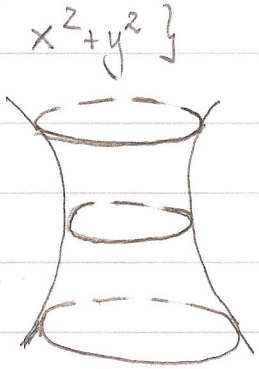
$$X : I \times (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^3$$

$$X(t,u) = (1-u)\alpha(t) + u\,P$$

$$= \alpha(t) + u\,w(t).$$

Für $u = 0$ ist $X(t,0)$ gerade ein Punkt auf α, für $u = 1$ münden die Strecken in P. Man nennt X den verallgemeinerten Kegel über α mit Spitze in P.

5) Auch das <u>Rotationshyperboloid</u> $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\}$ ist eine Regelfläche: Wählt man



$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ (1-Kreislinie in die (x,y)-Ebene) und

$$w(t) = (\alpha'(t), 1) = (-\sin t, \cos t, 1),$$

so ist $X(t,u) = \alpha(t) + u\,w(t)$ eine Dar-

von S : Aus $X(t,u) = (\underbrace{\cos t - u \sin t}_{=:x}, \underbrace{\sin t + u \cos t}_{=:y}, u)$

folgt ja $x^2+y^2 = (\cos t - u\sin t)^2 + (\sin t + u \cos t)^2 =$

$\cos^2 t + u^2 \sin^2 t + \sin^2 t + u^2 \cos^2 t = 1+u^2.$

□

Man hat:

X Regelfläche $\Longrightarrow$ Gauß-Krümmung $K \leq 0$

Beweis: Sei $X(t,u) = \alpha(t) + u\, w(t)$. Dann ist $X_{uu} \equiv 0$

und somit $N \equiv 0$ (beachte: wir bezeichnen die Variablen hier

mit (t,u), u hat also die Rolle des früheren v!), aus

$K = \dfrac{\mathcal{L}N - M^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$ wird $K = -M^2/(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)$,

und $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 > 0$ (wir nehmen an, dass X regulär ist)

ergibt $K \leq 0$.

□

II. Minimalflächen

waren nach unserer Definition Flächen $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit Eigenschaft $H(=\text{mittlere Krümmung}) \equiv 0$. Dies lässt zunächst keinerlei Minimalität von X erkennen. Um einen anderen Blickwinkel zu bekommen, betrachten wir irgendine Fläche $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$, fixieren eine (kleine) offene Menge $\mathcal{U}$ mit $\overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ und betrachten $\zeta: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ beliebig, allerdings $\zeta \equiv 0$ nahe $\partial\mathcal{U}$. Man setzt für $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$

$$\Phi(u,v,t) := X(u,v) + t\,\zeta(u,v)\,N(u,v),$$

$$X^t: \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad X^t(u,v) := \Phi(u,v,t),$$

d.h.: Außerhalb von $\mathcal{U}$ stimmen alle Flächen mit X überein, es gilt $X^0 = X$, und innerhalb von $\mathcal{U}$ wird die Fläche X in normaler Richtung variiert. Unser Ziel ist die Berechnung von $\frac{d}{dt}\big|_0 A_\Omega(X^t)$, $A_\Omega(X^t) =$

Flächeninhalt von X^t, in geometrischen Größen von X.

Ist nämlich dann X eine "Minimalfläche", also eine Fläche, die unter allen Flächen $Y: \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit festem Rand den Inhalt minimiert, so muss $0 = \frac{d}{dt}\big|_0 F_\Omega(X_t)$ sein mit der Konsequenz, dass die zu bestimmenden geometrischen Größen von X verschwinden. Hierbei wird es sich um die mittlere Krümmung H handeln.

Es gilt (mit der üblichen Symbolik für partielle Ableitungen)

$$X^t_u = X_u + t\eta N_u + t\eta_u N,$$

$$X^t_v = X_v + t\eta N_v + t\eta_v N,$$

und man bekommt für die Koeffizienten der Fundamentalmatrix von I (wegen $X_u \cdot N = 0 = N_u \cdot N$, etc.)

$$E^t := X^t_u \cdot X^t_u = E + 2t\eta X_u \cdot N_u + t^2\eta^2 |N_u|^2 + t^2(\eta_u)^2,$$

$$F^t := X_u^t \cdot X_v^t = F + t\eta\,(X_u \cdot N_v + X_v \cdot N_u)$$
$$+ t^2 (\eta^2 N_u \cdot N_v + \eta_u \eta_v),$$
$$G^t := X_v^t \cdot X_v^t = G + 2t\eta X_v \cdot N_v + t^2 \eta^2 |N_v|^2$$
$$+ t^2 (\eta_v)^2,$$

so dass

$$E^t G^t - (F^t)^2 = EG - F^2 + t(2\eta E X_v \cdot N_v$$
$$+ 2\eta G X_u \cdot N_u - F\eta 2[X_u \cdot N_v$$
$$+ X_v \cdot N_u]) + t R(u,v,t)$$

mit $\lim_{t \to 0} R(u,v,t) = 0$. Per Definition ist

$$X_u \cdot N_u = -\mathcal{L}, \quad X_u \cdot N_v = X_v \cdot N_u = -\mathcal{M},$$
$$X_v \cdot N_v = -\mathcal{N},$$

also: $$E^t G^t - (F^t)^2 = EG - F^2 - 2t\eta[\mathcal{N}E +$$
$$- 2F\mathcal{M} + G\mathcal{L}] + tR(t,u,v).$$

Für den Flächeninhalt von X^t gilt

$$A_\Omega(X^t) = \int_\Omega |X_u^t \times X_v^t| \, du\,dv =$$

$$\int_\Omega \sqrt{E^t \cdot G^t - (F^t)^2} \, du\,dv \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 A_\Omega(X^t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} (-2)\eta \left[NE - 2FM + GL \right] du\,dv$$

$$= -2 \int_\Omega \eta \; \frac{1}{2} \frac{1}{EG-F^2} \left[NE - 2MF + LG \right] \cdot \sqrt{EG-F^2} \, du\,dv$$

$$= -2 \int_U \eta \, H \sqrt{EG-F^2} \, du\,dv .$$

Ist also $H \equiv 0$, so folgt $A'_\Omega(0) = 0$ für alle U offen in Ω mit $\overline{U} \subset \Omega$ und alle normalen Variationen.

Umgekehrt: Ist X tatsächlich lokal flächenminimal, so ist $A_\Omega(0) \le A_\Omega(t)$, also $A'_\Omega(0) = 0$, so dass

nach obiger Rechnung

$$\int_U \eta\, H \sqrt{\varepsilon g - \mathcal{F}^2}\, du\, dv \equiv 0$$

für alle U wie oben und alle η mit Träger in U. Dann ist aber $H\sqrt{\varepsilon g - \mathcal{F}^2} \equiv 0$, also $H \equiv 0$ wegen $\sqrt{\ } > 0$.

Minimalflächen ("$H \equiv 0$") sind nach dieser Überlegung genau die kritischen Punkte des Flächenfunktionals bzgl. normaler Variationen. Bekanntlich sind kritische Punkte nicht notwendig (lokale) Extrema, hier gilt jedoch:

> Erfüllt die Fläche $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Forderung $H \equiv 0$, so ist X lokal flächenminimal.

Zum Schluss betrachten wir noch eine besondere Form der Parametrisierung von Flächen, die für Minimalflächen einer sehr einfachen Differentialgleichung genügt:

Definition: Eine Fläche $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt **konform** oder **isotherm parametrisiert**, falls gilt:

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v,$$

d.h. falls $E = G$ und $F = 0$.

Bemerkung: Die Fundamentalmatrix von I ist an jeder Stelle (u,v) ein Vielfaches der Einheitsmatrix. X_u und X_v sind senkrecht zueinander mit ~~Länge 1~~ gleicher Länge! (u,v) heißen isotherme Parameter.

Satz: Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ **isotherm parametrisiert**. Dann gilt:

$$\Delta X := X_{uu} + X_{vv} = 2H\, X_u \wedge X_v.$$

Insbesondere hat man:

$$X \text{ Minimalfläche } (H \equiv 0) \iff \Delta X \equiv 0.$$

Beweis: Aus $X_u \cdot X_u - X_v \cdot X_v = 0$ folgt:

$$0 = (X_u \cdot X_u - X_v \cdot X_v)_u = 2\,(X_{uu} \cdot X_u - X_{uv} \cdot X_v)$$

$$= 2\,(X_{uu} \cdot X_u - \underbrace{(X_u \cdot X_v)_v}_{=0} + X_u \cdot X_{vv})$$

$$= 2\,\Delta X \cdot X_u\,,$$

$$0 = (X_v \cdot X_v - X_u \cdot X_u)_v = \ldots = 2\,\Delta X \cdot X_v\,,$$

so dass $\Delta X = \lambda\, X_u \times X_v$ mit $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$.

Es gilt

$$\Delta X \cdot (X_u \times X_v) = (X_{uu} + X_{vv}) \cdot N\, |X_u \times X_v| =$$

$$(\mathcal{L} + \mathcal{N})\, |X_u \times X_v|\,,$$

so dass $\lambda = (\mathcal{L} + \mathcal{N})\, |X_u \times X_v|^{-1} = \dfrac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{\sqrt{\mathcal{E}}\sqrt{\mathcal{G}}}$.

Hier ist nun $H = \dfrac{\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{M}\mathcal{F}}{2\,(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} \underset{(\mathcal{E}=\mathcal{G},\ \mathcal{F}=0)}{=}$

$\dfrac{\mathcal{E}\,(\mathcal{L} + \mathcal{N})}{2\,\mathcal{E}^2} = \dfrac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\,\mathcal{E}}$, also $\lambda = 2H$.

□

Kapitel III Die innere Geometrie von Flächen

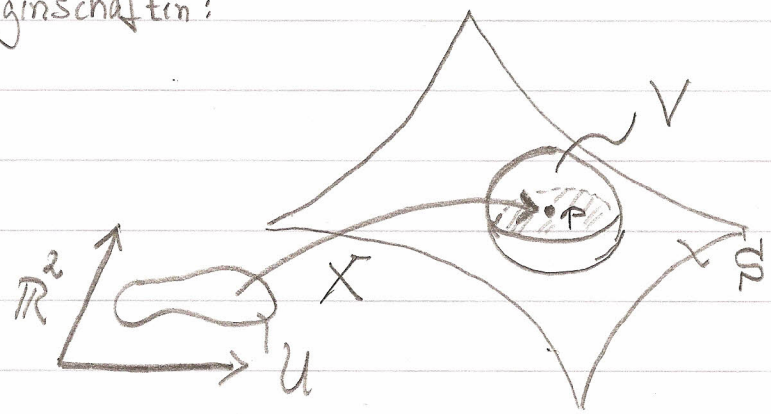
§1 Einführung

Bisher haben wir Flächen in $\mathbb{R}^3$ betrachtet, die durch eine Parametrisierung $\Omega \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind und alle geometrischen Begriffe über diese Parametrisierung definiert. Ab jetzt werden wir unter einer Fläche eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ verstehen, die man zumindest lokal parametrisieren kann, und wir wollen uns mit der inneren Geometrie solcher Flächen beschäftigen. Das sind Eigenschaften, die unabhängig sind von einer speziell gewählten lokalen Parameterdarstellung.

Definition 1: Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt eine *reguläre (eingebettete) Fläche*, wenn für alle Punkte $p \in S$ gilt: Zu p gibt es eine Umgebung V in $\mathbb{R}^3$, eine

offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine <u>Bijektion</u> $X: U \to S \cap V$

mit den folgenden Eigenschaften:



i) X ist glatt ($= C^\infty$) als Abbildung $U \to \mathbb{R}^3$.

ii) X_u und X_v sind für alle $(u,v) \in U$ linear unabhängig.

iii) $X^{-1}: V \cap S \to U$ ist stetig ($\Leftrightarrow \exists\, W \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F: W \to \mathbb{R}^2$ stetig, so dass $V \cap S \subset W$ und $F|_{V \cap S} = X^{-1}$)

<u>Bemerkungen:</u> 1.) Die Bezeichnung "eingebettet" bezieht sich darauf, dass S ("die Fläche") direkt als Teilmenge des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^3$ definiert wird. Es gibt eine abstraktere Definition für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Bezugnahme

auf einen umgebenden Euklidischen Raum.

2.) <u>Tangentialebene</u>: Sei $p \in S$ und X eine <u>lokale Parametrisierung</u> von S bei p wie in Definition 1.

$$T_p S := \text{Tangentialebene von } S \text{ in } p := DX|_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

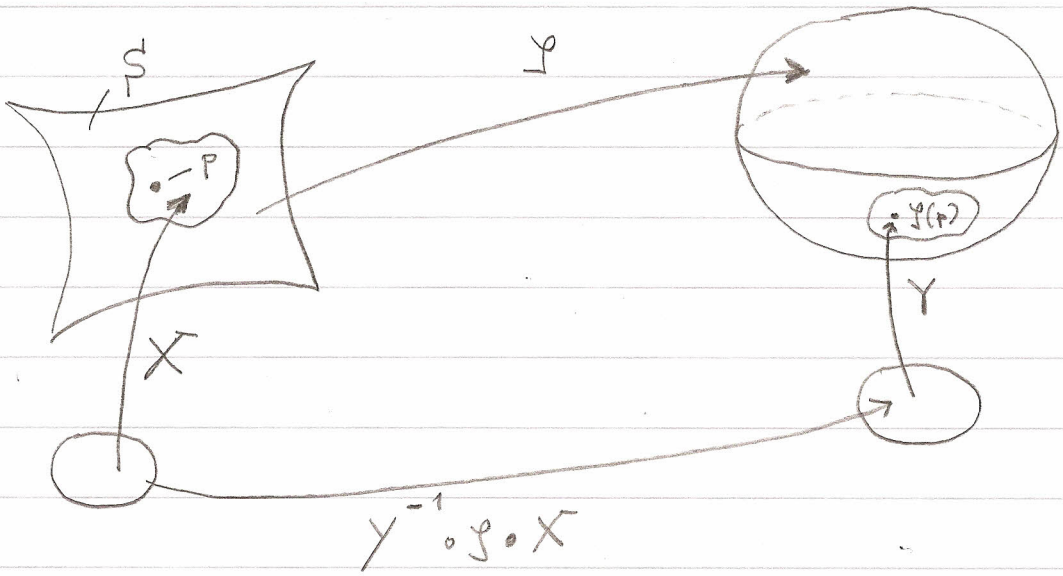
Die Definition hängt scheinbar von der Wahl der lokalen Parametrisierung von S bei p ab, wie früher gilt jedoch:

$$T_p S = \{\alpha'(0) : \alpha : I \to \mathbb{R}^3 \text{ diff.bar}, I \text{ Intervall um } 0, \alpha(0) = p, \alpha(I) \subset S\},$$

und die Menge rechts ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung von S bei p.

□

Seien S, S' zwei reguläre Flächen, $f : S \to S'$.



<u>Definition 2</u>: a) $f: S \to S'$ heißt <u>differenzierbar (glatt)</u>, falls es zu jedem $p \in S$ eine Parametrisierung X von S bei p und eine Parametrisierung Y von S' nahe $f(p)$ gibt, so dass $Y^{-1} \circ f \circ X$ im üblichen Sinn glatt ist.

b) Ein <u>Diffeomorphismus</u> $f: S \to S'$ ist eine glatte <u>Bijektion</u>, deren Umkehrabbildung $f^{-1}: S' \to S$ ebenfalls glatt ist.

c) Ein Diffeomorphismus $f: S \to S'$ heißt eine

Isometrie, wenn für alle $p \in S$, $w, \tilde{w} \in T_p S$

gilt: $$\boxed{d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w}) = w \cdot \tilde{w}}$$

Man nennt S und S' dann zueinander isometrisch.

Bemerkungen: 1.) In c) bedeutet

$$d\varphi_p : T_p S \longrightarrow T_{\varphi(p)} S'$$

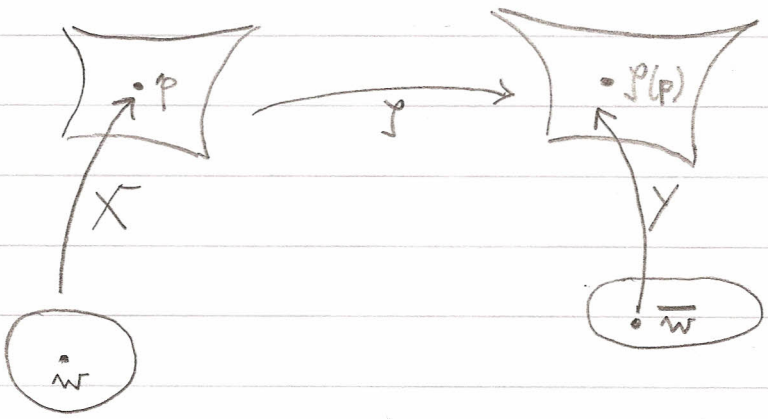
das Differential von φ in p, das bei einer Isometrie per Definition "das Skalarprodukt erhält". Wie erklärt man in vernünftiger Weise das Differential $d\varphi_p$ als lineare Abbildung

$$T_p S \longrightarrow T_{\varphi(p)} S' \; ?$$

Sei $w \in T_p(S)$. Wähle eine Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Dann ist $\tilde{\alpha} := \varphi \circ \alpha$ Kurve in S' mit $\tilde{\alpha}(0) = \varphi(p)$. Man setzt:

$$d\varphi_p(w) := \tilde{\alpha}'(0).$$

Die folgende formale Definition von $d\varphi_p$ leistet dasselbe:



Das Differential $D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X)|_w$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $w := X^{-1}(p)$, und man bekommt daraus die gewünschte lineare Abbildung $T_p S \to T_{\varphi(p)} S'$ durch Bildung von $\left(\bar{w} := Y^{-1}(\varphi(p))\right)$

$$DY|_{\bar{w}} \circ D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X)|_w \circ \left(DX|_w\right)^{-1}$$

2.) Ist S eine Fläche und $p \in S$, so ist per früherer Definition die Erste Fundamentalform I_p die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $T_p S$. $\varphi: S \to S'$ ist also genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$$\forall w, \tilde{w} \in T_p S: \; I^{S'}_{\varphi(p)}\left(d\varphi_p(w), d_p\varphi(\tilde{w})\right) = I^{S}_{p}(w, \tilde{w})$$

Ein Diffeomorphismus φ ist also genau dann eine Isometrie $S \to S'$, wenn das Differential $d\varphi_p$ überall die Erste Fundamentalform erhält.

3.) Man nennt eine glatte Abbildung $\varphi: S \to S'$ eine <u>lokale Isometrie</u>, wenn jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung U in $\mathbb{R}^3$ hat, so dass $\varphi|_{U \cap S}$ eine Isometrie $U \cap S \longrightarrow \varphi(U \cap S) \subset S'$ ist.

<u>Beispiel:</u> Sei $S := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Z ist also der Zylinder über der Einheitskreislinie. Man setzt $\varphi : S \longrightarrow Z$, $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Offensichtlich ist φ glatt, aber natürlich <u>nicht</u> global injektiv, allerdings handelt es sich um eine lokale Isometrie. Es gilt nämlich:

$$d\varphi|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$, und man hat für $w = (w_1, w_2)$

$\in \mathbb{R}^2 \; (= T_{(u,v)} S)$:

$$d\varphi|_{(u,v)}(w) \cdot d\varphi|_{(u,v)}(w) = \left\| \begin{pmatrix} -w_1 \cdot \sin u \\ w_1 \cdot \cos u \\ w_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = |w|^2$$

Folglich gilt

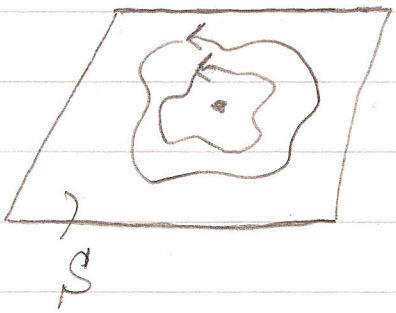
$$d\varphi|_{(u,v)}(w) \cdot d\varphi|_{(u,v)}(\tilde{w}) = w \cdot \tilde{w} \qquad \circledast$$

zumindest für $w = \tilde{w} \in T_{(u,v)} S$, aber das ist gleichwertig mit $\circledast$ für alle $w, \tilde{w} \in T_{(u,v)} S$. Umgekehrt ist Z auch lokal isometrisch zur Ebene : Man rollt Z auf die Ebene ab.

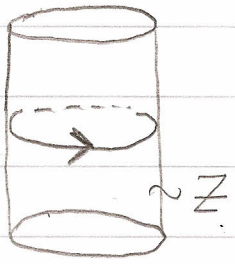
□

Aus topologischen Gründen sind S und Z nicht isometrisch zueinander. In der Ebene S kann offenbar jede geschlossene Kurve stetig über eine Schar geschlossener Kurven in einen Punkt deformiert werden ("die Ebene ist einfach zusammen-

hängend), für geschlossene Kurven in Z ist dies i.a. nur dann möglich, wenn man dabei Z verlässt. Mithin kann es nicht einmal einen Homeomorphismus $S \to Z$ geben.



S



Z

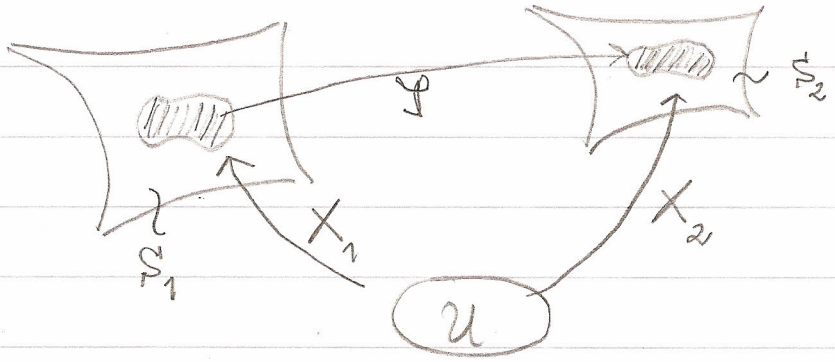
Sind bei lokaler Parametrisierung über derselben Grundmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ die Koeffizienten von I für zwei Flächen gleich, so sind diese lokal isometrisch, genauer:

<u>Satz 1</u>: Seien S_1, S_2 zwei reguläre Flächen. Angenommen, $X_1 : U \to S_1$, $X_2 : U \to S_2$ sind lokale Parametrisierungen über derselben Grundmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$E_1 = E_2, \quad F_1 = F_2, \quad G_1 = G_2 \quad \text{auf } U.$$

Dann ist $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(W) \to S_2$ eine lokale

Isometrie.



Beweis: Sei $p \in X_1(U)$, $w \in T_p S_1$. Dazu wähle man eine Kurve $\alpha(t) = (u(t), v(t)) \in U$ mit

$$X_1(\alpha(0)) = p, \qquad w = \frac{d}{dt}\Big|_0 (X_1 \circ \alpha)(t).$$

Dann gilt: (Kurve in S_1 mit Richtung w)

$$d\varphi_p(w) := \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi(\underbrace{X_1 \circ \alpha}(t)) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \left[(X_2 \circ X_1^{-1}) \circ (X_1 \circ \alpha)\right](t) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 (X_2 \circ \alpha)(t) = u'(0)(X_2)_u(\alpha(0))$$

$$+ v'(0)(X_2)_v(\alpha(0))$$

und man bekommt:

$$d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w) = (u'(0))^2 \underbrace{(X_2)_u(\alpha(0)) \cdot (X_2)_u(\alpha(0))}_{= E_2(\alpha(0))} +$$

$$+ 2\ u'(0)v'(0)\underbrace{(X_2)_u(\alpha(0))\cdot(X_2)_v(\alpha(0))}_{=\mathcal{F}_2(\alpha(0))}$$

$$+ (v'(0))^2\underbrace{(X_2)_v(\alpha(0))\cdot(X_2)_v(\alpha(0))}_{=\mathcal{G}_2(\alpha(0))} \overset{\text{Vor.}}{=}$$

$$(u'(0))^2\,\mathcal{E}_1(\alpha(0)) + 2u'(0)v'(0)\,\mathcal{F}_1(\alpha(0)) + (v'(0))^2\,\mathcal{G}_1(\alpha(0)).$$

Zugleich ist offenbar $\left(w = \frac{d}{dt}\Big|_0 X_1(\alpha(t)) = u'(0)\cdot(X_1)_u(\alpha(0)) + v'(0)(X_1)_v(\alpha(0))\right)$

$$w\cdot w = \frac{d}{dt}\Big|_0 X_1(\alpha(t))\cdot\frac{d}{dt}\Big|_0 X_1(\alpha(t)) =$$

$$(u'(0))^2\,(X_1)_u(\alpha(0))\cdot + 2u'(0)v'(0)(X_1)_u(\alpha(0))\cdot(X_1)_v(\alpha(0)) +$$

$$(v'(0))^2\,(X_1)_v(\alpha(0))\cdot(X_1)_v(\alpha(0)) =$$

$$(u'(0))^2\,\mathcal{E}_1(\alpha(0)) + 2u'(0)v'(0)\,\mathcal{F}_1(\alpha(0)) + (v'(0))^2\,\mathcal{G}_1(\alpha(0)),$$

also $d\varphi_p(w)\cdot d\varphi_p(w) = w\cdot w$. □

Als Anwendung von Satz 1 folgt

Katenoid und Helikoid sind lokal isometrisch.

Dazu beachtet man:

$$X^K(u,v) = (\cosh v \cos u,\ \cosh v \sin u,\ v)$$

ist eine Parametrisierung des Katenoids, und für Rotationsflächen

$$X(u,v) = (f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v))$$

gilt allgemein

$$E = f^2,\quad F = 0,\quad G = (f')^2 + (g')^2,$$

so dass

$$(1)\qquad E^K = \cosh^2 v,\quad F^K \equiv 0,\quad G^K = 1 + \sinh^2 v.$$

Das Helikoid war ursprünglich parametrisiert durch

$$Y(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ u),$$

mit der Ersetzung $v \leftrightarrow \sinh v$ ergibt sich

$$X^H(u,v) = (\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ u),$$

und man rechnet nach

$$X^H_u = (-\sinh v \sin u,\ \sinh v \cos u,\ 1),\ X^H_v = \ldots \Longrightarrow$$

$$E^H = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v, \quad F^H = X_u^H \cdot X_v^H = 0,$$

(2)

$$G^H = \cosh^2 v,$$

so dass aus (1), (2) mit Satz 1 die lokale Isometrie beider Flächen folgt.

□

Ist S eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, so ist für $p, q \in S$ die Zahl $|p-q|$ (= Euklidischer Abstand in $\mathbb{R}^3$) nicht die Größe, die den Abstand von p und q auf S, also den sogenannten inneren Abstand, misst.

Definition 3: Für $p, q \in S$ sei

$$d(p,q) := \inf \{ L(c) : c \text{ Kurve in } S \text{ von } p \text{ nach } q \}.$$

$d(p,q)$ heißt innerer Abstand von p zu q in S.

Hierbei werden nur zusammenhängende Flächen S betrachtet, d.h. zu $p, q \in S$ gibt es mindestens

eine Kurve c, die in p startet, ganz in S verläuft, um in q zu enden.

Satz 2: $d: S \times S \to [0,\infty)$ macht S zu einem metrischen Raum.

Beweis: i) $d \geq 0$ klar; es ist $d(p,p) = 0$, denn $c(t) \equiv p$ verbindet p mit sich selbst.

ii) Sei $d(p,q) = 0$. Wegen (wieso?!)

$$|p-q| \leq d(p,q)$$

ist dann $p = q$.

iii) Die Symmetrie $d(p,q) = d(q,p)$ ergibt sich, da man zur Berechnung von $d(q,p)$ alle Kurven von p nach q rückwärts durchlaufen kann.

iv) Zu zeigen ist $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

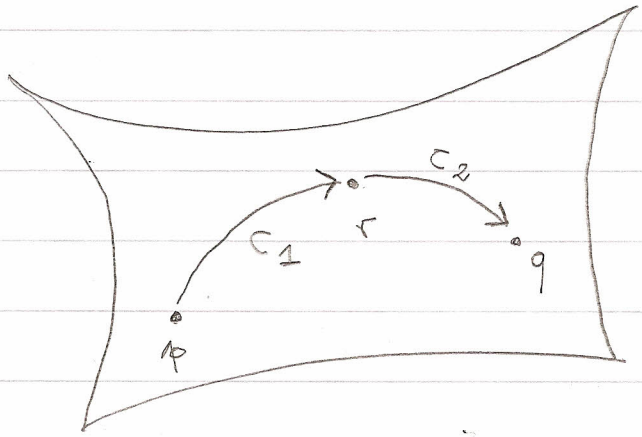
für beliebige Punkte $p, q, r \in S$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle

man Kurven c_1 von

p nach r bzw. c_2

von r nach q mit



$$L(c_1) \leq d(p,r) + \varepsilon, \quad L(c_2) \leq d(r,q) + \varepsilon .$$

Der zusammengesetzte Weg $c_1 c_2$ führt von p nach q,

so dass

$$d(p,q) \leq L(c_1 c_2) = L(c_1) + L(c_2) \leq$$

$$2\varepsilon + d(p,r) + d(r,q) ,$$

wegen der Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung. □

Satz 3: Seien $\tilde{S}, \tilde{S}'$ reguläre Flächen, $\varphi : \tilde{S} \to \tilde{S}'$

sei ein Diffeomorphismus. Dann gilt:

φ ist eine Isometrie $\Longleftrightarrow$

$$\circledast \quad L^S(c) = L^{S'}(\varphi \circ c) \quad \forall\, c = \text{Kurve in } S$$

Bemerkung: $\circledast$ sagt aus, dass φ die Kurve c in S in die Kurve $\varphi \circ c$ mit gleicher Länge abbildet.

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei also φ Isometrie $S \to S'$ und $c : [a,b] \to S$ eine Kurve. Dann gilt

$$L^{S'}(\varphi \circ c) = \int_a^b \left| \frac{d}{dt}(\varphi \circ c) \right| dt =$$

$$\int_a^b \left(d\varphi_c(c'(t)) \cdot d\varphi_c(c'(t)) \right)^{1/2} dt \underset{\text{Def. 2 c)}}{=}$$

$$\int_a^b \left(c'(t) \cdot c'(t) \right)^{1/2} dt = L^S(c).$$

$\Longleftarrow$ Sei die Bedingung $\circledast$ aus Satz 3 erfüllt. Angenommen, es gibt $p \in S$ und $w \in T_pS - \{0\}$ mit

$$w \cdot w < d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w).$$

(Im Fall „>" führt man entsprechend zum Widerspruch!)

Sei $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \to S$ eine Kurve mit $c(0) = p$, $c'(0) = w$

und somit (**) $|c'(0)|^2 < |(f \circ c)'(0)|^2$.

Für $\varepsilon << 1$ kann man annehmen, dass (**) nicht nur

für $t = 0$ sondern für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ richtig ist.

(Das ist ein Stetigkeitsargument, denn $t \mapsto |c'(t)|^2$,

$t \mapsto |(f \circ c)'(t)|^2$ sind stetig.). Es folgt

$$L^S(c) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |c'(t)|\,dt < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |(f \circ c)'(t)|\,dt = L^{S'}(f \circ c),$$

Widerspruch!

□

<u>Korollar</u>: Sind S und S' zusammenhängende Flächen

und $f : S \to S'$ eine <u>Isometrie</u>, so gilt für alle

$p, q \in S$ $\quad d^S(p,q) = d^{S'}(f(p), f(q))$.

§2 Konforme Abbildungen

Der Begriff der Isometrie von Flächen ist eine natürliche "Äquivalenz" hinsichtlich der metrischen Eigenschaften von Flächen, man denke etwa an die inneren Längenmessung. Eine abgeschwächte Version der "Äquivalenz" von Flächen unter Isometrien ist die sogenannte konforme Äquivalenz.

Definition 4: Seien S, S' reguläre Flächen. Ein Diffeomorphismus $f: S \to S'$ heißt **konform**, wenn gilt:

Für alle $p \in S$ und alle $w, \tilde{w} \in T_p S$ ist

$$df_p(w) \cdot df_p(\tilde{w}) = \lambda^2(p)\, w \cdot \tilde{w}$$

mit einer glatten Funktion $\lambda^2 > 0$.

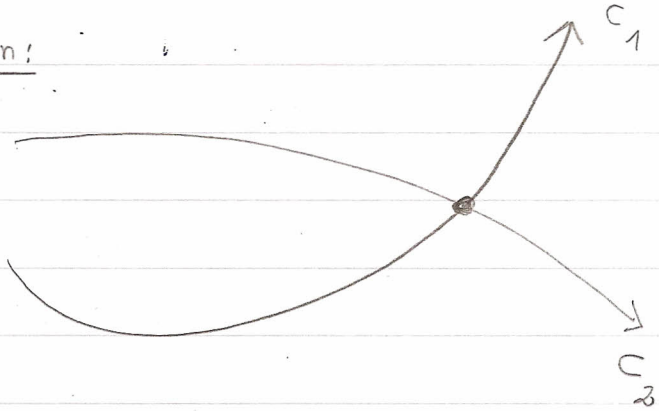
Bemerkungen: 1.) $\lambda^2 \equiv 1 \iff f$ Isometrie

2.) Man nennt S, S' **konform äquivalent**, falls es

eine konforme Abbildung $\varphi: S \to S'$ gibt. Offenbar handelt es sich dabei um eine Äquivalenzrelation (!).

3.) Ist $\varphi: S \to S'$ differenzierbar, so heißt φ <u>lokal konforme Abbildung</u>, falls es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung U von $\mathbb{R}^3$ gibt mit $\varphi|_{U \cap S}: U \cap S \to \varphi(U \cap S) \subset S'$ konform.

<u>Geometrische Interpretation:</u>



Seien c_1, c_2 zwei Kurven in S,

$c_1, c_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, die sich zur Zeit $t = 0$ schneiden. Für den Schnittwinkel $\sphericalangle$ bei $t = 0$ gilt

$$\cos \sphericalangle = \frac{c_1'(0)}{|c_1'(0)|} \cdot \frac{c_2'(0)}{|c_2'(0)|}.$$

Ist $\varphi: S \to S'$ konform, so gehen c_1, c_2 über in $\varphi \circ c_1, \varphi \circ c_2$. Diese schneiden sich ebenfalls in $t = 0$

mit Schnittwinkel $\tilde{\alpha}$, für den gilt:

$$\cos\tilde{\alpha} = \frac{(\varphi\circ c_1)'(0)}{|(\varphi\circ c_1)'(0)|} \cdot \frac{(\varphi\circ c_2)'(0)}{|(\varphi\circ c_2)'(0)|} =$$

$$\frac{\lambda^2\, c_1'(0)\cdot c_2'(0)}{\lambda^2\, |c_1'(0)|\, |c_2'(0)|} = \cos\alpha .$$

Konforme Abbildungen erhalten zwar nicht die Längen zwischen Vektoren, aber sie sind winkeltreu. □

Satz 1 hat das folgende Analogon im Kontext konformer Abbildungen:

Satz 4: Seien S_1, S_2 reguläre Flächen und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Angenommen, es gibt lokale Parametrisierungen $X_1 : U \to S_1$, $X_2 : U \to S_2$, so dass für die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform gilt $E_1 = \lambda^2 E_2$, $F_1 = \lambda^2 F_2$, $G_1 = \lambda^2 G_2$ mit $\lambda^2 > 0$ und glatt auf U. Dann ist $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(U) \to S_2$ lokal konform.

Beweis: vgl. Satz 1

Lokale Konformität von regulären Flächen ist offenbar eine Äquivalenzrelation, tatsächlich gilt:

THEOREM: Je zwei reguläre Flächen sind lokal konform äquivalent.

Insbesondere ist jede reguläre Fläche lokal konform äquivalent zur Ebene $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Sind also S_1, S_2 reguläre Flächen, $p \in S_1$, $q \in S_2$ beliebig, so gibt es Umgebungen U von p, V von q in $\mathbb{R}^3$ sowie eine konforme Abbildung $\varphi : U \cap S_1 \longrightarrow V \cap S_2$ mit $q = \varphi(p)$. Den Beweis findet man im Buch von

L. Bers, Riemann Surfaces, p. 15 - p. 35.

Die Idee besteht darin, lokale Parametrisierungen $X : \mathbb{R}^2 \supset U \to S$ zu konstruieren mit

(*) $E = \lambda^2 = G$, $F \equiv 0$ auf U

mit einer glatten Funktion $\lambda^2 > 0$ auf U. Für den Sonderfall zweier Minimalflächen kann man das Theorem mit weniger Aufwand beweisen. Im übrigen besagt (*) in unserer früheren Nomenklatur, dass man jede Fläche isotherm ($E = G$, $F = 0$) parametrisieren kann.

Beispiel 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) := (u(x,y), v(x,y))$ sei holomorph. Dann erfüllen u, v die Cauchy-Riemann Gleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, und mit

$N := \{ (x,y) \in U : u_x^2 + u_y^2 = 0 \}$ ist

$$\varphi : U \sim N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

lokal konform, denn es gilt:

$$|\varphi_x|^2 = |(u_x, v_x)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x^2 + u_y^2 =: \lambda^2 > 0;$$

$$|\varphi_y|^2 = |(u_y, v_y)|^2 = u_y^2 + v_y^2 = u_y^2 + u_x^2 = \lambda^2,$$

$$\mathcal{J}_x \cdot \mathcal{J}_y = (u_x, v_x) \cdot (u_y, v_y) = u_x u_y + v_x v_y =$$

$$u_x u_y - u_y u_x \equiv 0.$$

In diesem Sinn induzieren holomorphe Funktionen lokal konforme Abbildungen.

Beispiel 2: Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Einheitssphäre S^2: $X: U \to S^2$, $X(\Theta, \varphi) :=$

$(\sin\Theta \cos\varphi, \sin\Theta \sin\varphi, \cos\Theta)$, $U := (0,\pi) \times (0, 2\pi)$.

Dann parametrisiert man um: $u = \varphi$, $v := \ln \tan(\Theta/2)$.

Es folgt:

$$Y(u,v) = X(\Theta(v), \varphi(u)) = \left(\frac{1}{\cosh v} \cos u, \frac{1}{\cosh v} \sin u, -\tanh v\right).$$

$\left(\text{z.B.: } v := \ln \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) \Longrightarrow \Theta = 2 \arctan(e^v),\right.$

dann: $\cos\Theta = \cos(2 \arctan e^v) =$

$$\cos^2(\arctan e^v) - \sin^2(\arctan e^v) =$$

$$\frac{1}{1+\tan^2}(\arctan e^v) - \frac{\tan^2}{1+\tan^2}(\arctan e^v) =$$

$$\frac{1}{1+e^{2v}} - \frac{e^{2v}}{1+e^{2v}} = \frac{1-e^{2v}}{1+e^{2v}} = -\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}} = -\tanh v,$$

usw. Es folgt $Y(u,v) = \dots$)

Für die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform bekommt man in dieser Darstellung:

$$E = G = (\cosh v)^{-2}, \quad F \equiv 0.$$

Mithin ist

$$Y^{-1} : S^2 \supset X(U) \longrightarrow \text{Bild } Y^{-1} \subset \mathbb{R}^2$$

eine <u>konforme Abbildung</u>, genannt <u>Mercator-Projektion</u>.

Mercator hat diese Form einer Weltkarte 1569 veröffentlicht. Hier werden die Meridiane $\lambda \equiv \text{const}$ und die Breitenkreise $\varphi \equiv \text{const}$ auf zueinander senkrechte Geraden abgebildet.

§3 Das Theorema Egregium von Gauß (1827)

wurde von Gauß selbst als „herausragender" Satz bezeichnet. Die Aussage gehört zu den wichtigsten Sätzen der Differentialgeometrie, sie lautet:

Theorem: Die Gauß'sche Krümmung einer regulären Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.

Bemerkung: 1.) Für die mittlere Krümmung H gilt das nicht, man betrachte etwa den Zylinder und die Ebene.

2.) Der Beweis des Satzes beruht auf der Beobachtung, dass man die Gauß-Krümmung K schreiben kann in Termen der Koeffizienten der Ersten Fundamentalform und Ableitungen dieser Koeffizienten. Unter einer lokalen Isometrie stimmen aber die Koeffizienten von I an den entsprechenden Stellen überein.

3.) Da das Katenoid lokal isometrisch zum Helikoid ist, folgt aus dem Theorem die Gleichheit der Gauß-Krümmung an den entsprechenden Stellen. Das sieht man den Flächen nicht sofort an!

Wir präzisieren Bemerkung 2) und leiten die <u>partiellen Differentialgleichungen der Flächentheorie ab</u>: Sei $X: \mathbb{R}^2 \supset \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit dem begleitenden 3Bein X_u, X_v, N. Es gelten die Gleichungen (jeder Vektor links ist Linearkombination des 3 Beins)

$$(1)\quad \begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + b_{11} N, & b_{11} = \mathcal{L}, \\ \left.\begin{aligned} X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + b_{12} N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + b_{12} N \end{aligned}\right\}, & b_{12} = b_{21} = \mathcal{M}, \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + b_{22} N, & b_{22} = \mathcal{N}, \end{cases}$$

wobei wir die bekannten Definitionen der Koeffizienten aus II benutzt haben, etwa $\mathcal{L} := -N_u \cdot X_u = N \cdot X_{uu}$.

Außerdem haben wir noch die Weingarten-Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} N_u = -b^1_1 X_u - b^2_1 X_v, \\ N_v = -b^1_2 X_u - b^2_2 X_v. \end{cases}$$

Wir benennen die Variablen um durch $(u,v) \leftrightarrow (u_1,u_2)$

und können (1), (2) mit Summationskonvention ersetzen durch

$$(1)'\quad X_{u_\alpha u_\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_{u_\gamma} + b_{\alpha\beta} N,$$

$$(2)'\quad N_{u_\alpha} = -b^\beta_\alpha X_{u_\beta};$$

wobei (zur Erinnerung)

$$b^\beta_\alpha := b_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta},$$

$$G = (g_{\alpha\beta}),\ G^{-1} = (g^{\alpha\beta}),\quad \mathrm{II} = (b_{\alpha\beta})$$

G: 1te Fundamentalform; II: 2te Fundamentalform.

Man nennt

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ Christoffel-Symbole 2ter Art,

$$(3)\quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} := g_{\beta\varepsilon}\, \Gamma^\varepsilon_{\alpha\gamma}$$ Christoffel-Symbole 1ter Art.

Man nennt (1) bzw. (1)' die Darstellungsformeln von Gauß für die zweiten Ableitungen. Wir wollen die Christoffel-Symbole ausrechnen:

Es ist

$$(4)\quad X_{u_\alpha u_\beta} \cdot X_{u_\gamma} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} \underbrace{X_{u_\sigma} \cdot X_{u_\gamma}}_{= g_{\sigma\gamma} = g_{\gamma\sigma}} = g_{\gamma\sigma}\, \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \Longrightarrow$$

Symmetrie (5) $\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha}$.

Außerdem gilt ersichtlich die

Symmetrie (6) $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}$.

Andererseits ist

$$(7)\quad \begin{cases} g_{\alpha\beta,\gamma} := \dfrac{\partial}{\partial u_\gamma} g_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial}{\partial u_\gamma} \left(X_{u_\alpha} \cdot X_{u_\beta} \right) = \\ X_{u_\alpha u_\gamma} \cdot X_{u_\beta} + X_{u_\beta u_\gamma} \cdot X_{u_\alpha} \underset{(4)}{=} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \underset{(3)}{=} \\ g_{\beta\tau}\, \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\tau}\, \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}\,, \end{cases}$$

und (5) - (7) ergeben

$$- g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} =$$

$$- g_{\beta\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}$$

$$+ g_{\gamma\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\gamma\beta}$$

$$+ g_{\gamma\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\beta\alpha} + g_{\beta\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\gamma\alpha} = 2\, g_{\gamma\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \Longrightarrow$$

$$- g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} = 2\,\Gamma_{\alpha\gamma\beta} \Longrightarrow$$

(8) $$\boxed{\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2}\left\{ g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma} \right\}} \,.$$

Die Gleichung (8) sagt, dass sich die Christoffel-Symbole 1^{ter} Art allein durch 1^{te} Ableitungen der Ersten Fundamentalform beschreiben lassen. Gemäß (3) (Auflösen nach $\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\gamma}$) gilt dies dann auch für die Christoffel-Symbole 2^{ter} Art.

Insbesondere sind alle geometrischen Größen, die durch die Christoffel-Symbole beschrieben werden, isometrie-invariant.

Ziel ist der Nachweis, dass die Gauß-Krümmung eine solche Größe ist. Dazu gehen wir zurück zu den Gauß-Gleichungen

$$(1)' \quad X_{u_\alpha u_\beta} = \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} X_{u_\delta} + b_{\alpha\beta} N$$

und differenzieren diese, wobei jetzt und nachfolgend

$X_{,\beta\gamma}$ für $X_{u_\beta u_\gamma}$, etc., geschrieben wird. Damit liest sich $(1)'$ als

$$(1)' \quad X_{,\beta\gamma} = \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} X_{,\delta} + b_{\beta\gamma} N \,,$$

und es folgt als Gleichung für die 3^{tzn} partiellen Ableitungen:

$$X_{,\beta\gamma\alpha} = \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} X_{,\tau} + \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma} X_{,\tau\alpha} + b_{\beta\gamma,\alpha} N + b_{\beta\gamma} N_{,\alpha} \underset{(1)',(2)'}{=}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} X_{,\tau} + \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}\Big[\Gamma^{\delta}_{\tau\alpha} X_{,\delta} + \overbrace{b_{\tau\alpha} N}^{+}\Big] + b_{\beta\gamma,\alpha} N +$$

$$b_{\beta\gamma}\,(-b^{\tau}_{\alpha}) X_{,\tau} =$$

$$\Big[\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\delta\alpha}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha}\Big] X_{,\tau} +$$

$\left[\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}\, b_{\tau\alpha} + b_{\beta\gamma,\alpha} \right] N$. Die dritten Ableitungen sind offenbar symmetrisch, d.h.

$$X_{,\alpha\beta\gamma} = X_{,\beta\alpha\gamma} = X_{,\alpha\gamma\beta} \quad \cdots\cdots ,$$

speziell $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$. Dann ist (der Koeff. vor $X_{,\tau}$ verschwindet)

$$\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\delta\alpha}\,\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - b_{\beta\gamma}\, b^{\tau}_{\alpha} =$$

$$\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\tau}_{\delta\beta}\,\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} - b_{\alpha\gamma}\, b^{\tau}_{\beta} \quad \Longrightarrow$$

(g)
$$\boxed{\begin{aligned} R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma} &:= \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\tau}_{\delta\alpha}\,\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\tau}_{\delta\beta}\,\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \\ &= b_{\beta\gamma}\, b^{\tau}_{\alpha} - b_{\alpha\gamma}\, b^{\tau}_{\beta} \end{aligned}}$$

$$\left(= \underset{\uparrow}{g^{\sigma\tau}} \left(b_{\beta\gamma}\, b_{\alpha\sigma} - b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\sigma} \right) \right) .$$

Def. von b^{τ}_{α}!

Analog zu (g) erhält man aus $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$, dass in der Differenz der Koeffizient vor N verschwindet, also:

(10) $$\boxed{\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}\, b_{\tau\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma}\, b_{\tau\beta} + b_{\beta\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0.}$$

Die Gleichungen (9) heißen Gauß-Gleichungen, und (10) nennt man die Mainardi-Codazzi-Gleichungen. Gemäß Herleitung sind (9), (10) äquivalent zu $X_{,\beta\gamma\alpha} = X_{,\alpha\gamma\beta}$.

Der Riemannsche Krümmungstensor

$$R: T_pS \times T_pS \times T_pS \longrightarrow T_pS$$

wird definiert durch

(11) $$R(U,V)W := R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}\, U_\alpha V_\beta W_\gamma X_{,\tau},$$

wobei $U = U_\alpha X_{,\alpha}$, $V = V_\beta X_{,\beta}$, $W = W_\gamma X_{,\gamma}$.

Ist $Z = Z_\delta X_{,\delta}$, so folgt aus (11) und (9)

$$R(U,V)W \cdot Z = R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}\, U_\alpha V_\beta W_\gamma Z_\delta X_{,\tau} \cdot X_{,\delta} =: R_{\alpha\beta\gamma\delta}\, U_\alpha V_\beta W_\gamma Z_\delta,$$

wobei

(12) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} := g_{\delta\tau} R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma} \underset{(9)}{=} b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}$.

Für die Gauß-Krümmung gilt die Formel

$$K = \det(b_{\alpha\beta}) / W^2, \quad W^2 := EG - F^2,$$

d.h. mit obiger Setzung (vgl. (12))

$$R_{1212} = b_{21} b_{12} - b_{11} b_{22} = -\det(b_{\alpha\beta}) = -K W^2$$

$$\Longrightarrow (13) \quad \boxed{K = -R_{1212} / W^2} .$$

Der Tensor 4^ter Ordnung $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist gemäß (12) aus den Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ der Fundamentalmatrix der Zweiten Fundamentalform zusammengesetzt, und er entsteht aus „$R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ durch Multiplikation mit $g_{\delta\tau}$". In der Definitionsgleichung (9) für $R^{\tau}_{\alpha\beta\delta}$ hat man die Darstellung von $R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}$ durch die Christoffel-Symbole zweiter Art und deren erste Ableitungen.

Aus (3) und (8) ergibt sich die Darstellbarkeit der

Christoffel - Symbole 2^{ter} Art in Termen von $g_{\alpha\beta}$ und (ersten) Ableitungen davon, also:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ (sowie) ersten und zweiten partiellen Ableitungen davon.}$$

Wegen $W^2 = \det(g_{\alpha\beta})$ ergibt (13) folgendes Schlussresultat:

Die geometrische Größe K - definiert durch die Zweite Fundamentalform - hängt nur ab von den Koeffizienten der Ersten Fundamentalform sowie deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Damit ist das Theoreme Egregium bewiesen. □

Speziell betrachten wir eine <u>orthogonale Parametrisierung</u>, d.h. per Definition $\mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0$. Dann ist

$$W^2 = \mathcal{E}\mathcal{G}$$

und mit der üblichen Symbolik ergibt (4):

$$\Gamma_{111} = X_{uu} \cdot X_u = \frac{1}{2} \varepsilon_u ,$$

$$\Gamma_{221} = X_{uv} \cdot X_v = \frac{1}{2} g_u = \Gamma_{122} ,$$

$$\Gamma_{121} = X_{uu} \cdot X_v = F_u - \frac{1}{2} \varepsilon_v = -\frac{1}{2} \varepsilon_v ,$$

$$\Gamma_{212} = X_{vv} \cdot X_u = F_v - \frac{1}{2} g_u = -\frac{1}{2} g_u ,$$

$$\Gamma_{112} = X_{uv} \cdot X_u = \frac{1}{2} \varepsilon_v ,$$

$$\Gamma_{222} = X_{vv} \cdot X_v = \frac{1}{2} g_v ,$$

wobei hier $(u_1, u_2) \leftrightarrow (u, v)$ gesetzt wurde. Daraus folgt für die Christoffel-Symbole zweiter Art (s. (4) und benutze $(g_{rs}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$!)

$$(14) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \varepsilon_u / \varepsilon , & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g_u / g , \\ \Gamma_{11}^2 = -\varepsilon_v / 2g , & \Gamma_{22}^1 = -g_u / 2\varepsilon , \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \varepsilon_v / \varepsilon , & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g_v / g . \end{cases}$$

(13) ergibt

$$K = -\frac{1}{\varepsilon g} R_{1212} \underset{\substack{(12),\\ \text{Def. von } R\ldots}}{=} -\frac{1}{\varepsilon g} g_{22} R^2_{121}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} R^2_{121} \underset{(9)}{=} -\frac{1}{\varepsilon}\Big[\Gamma^2_{21,1} - \Gamma^2_{11,2} + \Gamma^2_{\delta 1}\,\Gamma^\delta_{21} - \Gamma^2_{\delta 2}\,\Gamma^\delta_{11}\Big].$$

$$\underset{(14)}{=} -\frac{1}{\varepsilon}\Big[\tfrac{1}{2}\left(g_u/g\right)_u + \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_v/g\right)_v + \Gamma^2_{11}\,\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{21}\,\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{12}\,\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}\,\Gamma^2_{11}\Big]$$

$$\underset{(14)}{=} -\frac{1}{\varepsilon}\tfrac{1}{2}\Big[\left(g_u/g\right)_u + \left(\varepsilon_v/g\right)_v + \tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_v/g\right)\cdot\left(\varepsilon_v/\varepsilon\right) + \left(g_u/g\right)^2 \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\left(g_u/g\right)\cdot\left(\varepsilon_u/\varepsilon\right) - \left(\tfrac{1}{2} g_v/g\right)\cdot\left(-\varepsilon_v/g\right)\Big]$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon}\Big[\left(g_u/g\right)_u + \left(\varepsilon_v/g\right)_v - \frac{(\varepsilon_v)^2}{2\varepsilon g} + \frac{(g_u)^2}{2g^2} - \frac{\varepsilon_u g_u}{2\varepsilon g} + \frac{\varepsilon_v g_v}{2g^2}\Big].$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung rechnet man nach:

Satz 5: Sei S reguläre Fläche und $X: U \to S$ eine orthogonale Parametrisierung auf $U \subset \mathbb{R}^2$, also $\mathcal{F} = X_u \cdot X_v \equiv 0$. Dann gilt für die Gauß-Krümmung auf U:

$$(15)\quad K = -\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathcal{E}_v}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathcal{G}_u}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\right)\right],$$

wobei wie üblich $\mathcal{E}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathcal{E}$, etc.

Bei isothermer Parametrisierung, also $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{G} = \lambda^2 > 0$, ergibt (15)

$$(16)\quad K = -\lambda^{-2}\,\Delta(\ln\lambda),$$

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Bemerkung zu (16): Es ist jetzt $\mathcal{E}_v/\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}} =$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2)/\lambda^2 = \frac{\partial}{\partial v}(\ln\lambda^2) = 2\frac{\partial}{\partial v}(\ln\lambda),$$

so dass $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varepsilon_v}{\sqrt{\varepsilon g}}\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\ln\lambda)$, usw.

Die Gleichungen von Gauß (9) und von Mainardi-Codazzi (10) sind für die Flächentheorie von derselben Bedeutung wie die Frenet'schen Formeln für Kurven, es gilt:

<u>Theorem von Bonnet:</u> Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen. Auf V seien glatte Funktionen $\varepsilon, \mathcal{F}, g; \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ gegeben mit $\varepsilon, g > 0$. Außerdem: $\varepsilon g - \mathcal{F}^2 > 0$!
Man definiert <u>formal</u> die Christoffel-Symbole sowie die anderen Größen, die in den Gleichungen von Gauß und Mainardi/Codazzi auftreten, und verlangt, dass diese Gleichungen gelten. <u>Dann gibt es zu jedem Punkt $q \in V$ eine Umgebung $U \subset V$ und eine Abbildung $X: U \to \mathbb{R}^3$, so dass $X(U)$ eine reguläre Fläche ist mit Koeffizienten $\varepsilon, \mathcal{F}, g$ bzw. $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ für I bzw. II.</u>

Ist U zusammenhängend und $\tilde{X}: U \to \mathbb{R}^3$ eine andere Parametrisierung mit denselben Eigenschaften, so gilt $\tilde{X} = T \circ \rho \circ X$ mit einer Translation $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und einer orthogonalen Abbildung $\rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\det \rho > 0$.

Beweis: Do Carmo, deutsche Ausgabe, p. 243 f.; allerdings fehlen dort Details, aber es gibt Referenzen. □

Folgerungen aus dem Theorema Egregium: (Alle Flächen S seien ab jetzt zusammenhängend)

Satz 6 (von Chern, 1945)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre geschlossene (, d.h. S ist kompakt) Fläche mit positiver Gauß-Krümmung. Für die Hauptkrümmungen gelte

O.E.

$x_1 \geq x_2$, $x_2 = f(x_1)$

mit einer monoton fallenden Funktion f. Dann ist S eine Sphäre.

Korollar 1: Ist S eine geschlossene reguläre Fläche mit Gauß-Krümmung $K \equiv \text{const} > 0$, so ist S eine Sphäre

Beweis von Korollar 1. Zunächst kann man die Voraussetzung sogar noch etwas abschwächen, denn es folgt bereits aus $K \equiv \text{const}$ und der Geschlossenheit von S, dass $K > 0$ sein muss. Dazu $S \subset \overline{B_R(0)}$ und $R_0 = \inf \{ R > 0 : S \subset \overline{B_R(0)} \}$ der kleinste Radius. S und $S_0 := \partial B_{R_0}(0)$ haben einen Berührpunkt $p \in S \cap S_0$. Dann ist $T_p S = T_p S_0$, also liegt S ganz auf einer

Seite von $(T_p S) + p$ (affine Tangentialebene) und kann die affine Tangentialebene nur in p berühren. Das ergibt $K \geq 0$. $K = 0$ ist aber nicht möglich.

Also ist $K = \varkappa_1 \varkappa_2 > 0$. O.E. sei $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$. Es folgt $\varkappa_2 = K/\varkappa_1$ und $f(\varkappa_1) := K/\varkappa_1$ fällt monoton. Chern's Satz liefert die Aussage.

Korollar 2: Sind $S, \tilde{S}$ zueinander isometrische Flächen, und ist $\tilde{S}$ eine Sphäre, so ist auch S eine Sphäre, und zwar mit demselben Radius wie $\tilde{S}$.

Beweis von Korollar 2: $\tilde{S}$ Sphäre heißt $K_{\tilde{S}} \equiv \text{const} \left(= 1/\text{Radius}\right)$, und da $S, \tilde{S}$ zueinander isometrisch sind, stimmen die Ersten Fundamentalformen von S und $\tilde{S}$ an entsprechender Stelle überein, also nach dem Theorema Egregium $K_S \equiv \text{const}$.

Nun benutze man Korollar 1. □

Korollar 3 : Sei S eine geschlossene Fläche mit positiver Gauß-Krümmung K. Ist dann die mittlere Krümmung H konstant, so ist S eine Sphäre.

Beweis von Korollar 3: Es ist

$$2H = \varkappa_1 + \varkappa_2 \equiv c,$$

und $\varkappa_1 \varkappa_2 > 0$ besagt, dass $\varkappa_1, \varkappa_2$ dasselbe Vorzeichen haben, o.E. $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$. Es ist $\varkappa_2 = c - \varkappa_1$ fallend, Chern's Satz liefert die Behauptung. □

Beweis von Satz 6: Die Voraussetzungen

$$K > 0 \;,\; \varkappa_1 \geq \varkappa_2,\; \varkappa_2 = f(\varkappa_1),\; f \downarrow,$$

seien erfüllt. Da S kompakt ist, nimmt $\varkappa_1$ in einem Punkt $p \in S$ sein Maximum an. Offenbar ist

p dann Minimum von $\varkappa_2$. Wir behaupten: p ist Nabelpunkt, also es gilt $\circledast$ $\varkappa_1(p) = \varkappa_2(p)$.

Es folgt für $q \in S$

$$\varkappa_1(p) \geq \varkappa_1(q) \underset{\text{Vor.}}{\geq} \varkappa_2(q) \geq \varkappa_2(p),$$

also mit $\circledast$ $\varkappa_1 = \varkappa_2$: jeder Punkt ist Nabelpunkt. Somit ist S Teil einer Sphäre. Da aber S kompakt und zusammenhängend ist, muss S selbst eine Sphäre sein.

ad $\circledast$: Sei $\varkappa_1(p) > \varkappa_2(p)$. Dann gilt $\varkappa_1 > \varkappa_2$ auch auf einer Umgebung von p (keine Nabelpunkte dort), und ohne Beweis sei vermerkt, dass es dann lokal bei p eine Parametrisierung $X: \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ von S gibt, so dass $u \mapsto X(u,0)$, $v \mapsto X(u,v)$ jeweils Krümmungslinien sind, also etwa

$$-N_u = \varkappa_1 X_u \,, \quad -N_v = \varkappa_2 X_v \,, \quad X_u \cdot X_v = 0.$$

Es folgt $\mathcal{F} = 0$ sowie

$$\mathcal{L} = -N_u \cdot X_u = \varkappa_1 X_u \cdot X_u = \varkappa_1 \mathcal{E},$$

$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v = \varkappa_1 X_u \cdot X_v = 0,$$

$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v = \varkappa_2 X_v \cdot X_v = \varkappa_2 \mathcal{G}.$$

Aus den Mainardi – Codazzi Gleichungen (10) bekommt man

$$\mathcal{L}_v = b_{11,2} \underset{(10)}{=} \Gamma_{21}^{\tau} b_{\tau 1} - \Gamma_{11}^{\tau} b_{\tau 2} + b_{21,1}$$

$$= \Gamma_{21}^{1} \mathcal{L} - \Gamma_{11}^{2} \mathcal{N} + \underbrace{(\mathcal{M})_u}_{=0} \underset{(14)}{=} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{E}} \mathcal{L} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}_v}{\mathcal{G}} \mathcal{N} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_v = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v \left(\varkappa_1 + \varkappa_2 \right),$$

und entsprechend

$$\mathcal{N}_u = b_{22,1} \underset{(10)}{=} \dots \underset{(14)}{=} \frac{1}{2} \mathcal{G}_u \left(\varkappa_1 + \varkappa_2 \right).$$

Andrerseits ergibt $\mathcal{L} = \varkappa_1 \mathcal{E}$ die Gleichung

$$\mathcal{L}_v = \varepsilon_v x_1 + \varepsilon (x_1)_v \,,$$

und aus $N = x_2 \, g$ folgt analog

$$N_u = g_u x_2 + g (x_2)_u \,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\varepsilon_v = 2 \, \mathcal{L}_v / x_1 + x_2 = 2 \, \varepsilon_v \frac{x_1}{x_1 + x_2} + 2 \, \frac{\varepsilon (x_1)_v}{x_1 + x_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon_v = - \frac{2 \varepsilon}{x_1 - x_2} (x_1)_v \,,$$

$$g_u = 2 \, N_u / x_1 + x_2 = 2 \, g_u \frac{x_2}{x_1 + x_2} + 2 \, \frac{g (x_2)_u}{x_1 + x_2}$$

$$\Longrightarrow \quad g_u = \frac{2 g}{x_1 - x_2} (x_2)_u \,.$$

Schließlich ersetzen in der Formel (15) für K die Größen ε_v, g_u durch obige Terme, es folgt:

$$K = - \frac{1}{2 \sqrt{\varepsilon g}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(- \frac{2 \varepsilon}{x_1 - x_2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon g}} (x_1)_v \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2 g}{x_1 - x_2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon g}} (x_2)_u \right) \right] =$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{\varepsilon g}}\Big[-\frac{2\varepsilon}{x_1-x_2}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon g}}\,(x_1)_{vv}+\frac{2g}{x_1-x_2}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon g}}\,(x_2)_{uu}$$

$$+\;(x_1)_v\,f_1(u,v)+(x_2)_u\,f_2(u,v)\Big]$$

mit geeignet definierten Funktionen f_1, f_2.

Also:

$$-2\,\varepsilon\,g\,K=-\frac{2\varepsilon}{x_1-x_2}(x_1)_{vv}+\frac{2g}{x_1-x_2}(x_2)_{uu}$$

$$(**)\qquad +(x_1)_v f_1(u,v)+(x_2)_u f_2(u,v).$$

Wegen $K>0$ ist die linke Seite von (**) <0.

Sei $X(0,0)=p$. Dann ist in $(0,0)$

$$(x_1)_v=(x_2)_u=0\,,\ (x_1)_{vv}\le 0,\ (x_2)_{uu}\ge 0$$

(da p Max. von x_1, Min. von x_2),

so dass die rechte Seite von (**) ≥ 0 ist, Widerspruch!

Die Annahme $x_1(p)>x_2(p)$ ist falsch, es folgt (*).

§4 Parallelтransport und geodätische Linien auf Flächen

Es sei hier $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ immer (Parametrisierung) eine(r) reguläre(n) Fläche, $\omega : [a,b] \to \Omega$ eine Kurve im Parameterbereich und $c := X \circ \omega$ die zugehörige Kurve auf X.

Definition 5: Ein Vektorfeld $V : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ heißt tangential längs c, falls für alle $t \in [a,b]$ gilt

$$V(t) \in T_{c(t)} X.$$

$\mathcal{V}_c :=$ alle tangentialen Vektorfelder längs c.

Ein beliebiges tangentiales Vektorfeld $V = V(t) \in \mathcal{V}_c$ hat also die Darstellung

$$V(t) = V_\alpha(t)\, X_{,\alpha}(\omega(t))$$

(Darstellung von $V(t) \in T_{c(t)} X$ durch die Basisvektoren $X_{,1}(\omega(t)), X_{,2}(\omega(t))$) . Die Ableitung

$V'(t)$ ist i.a. nicht tangential. Deshalb definiert man für $V \in \mathcal{V}_c$ die kovariante Ableitung

$$\frac{DV}{dt} \in \mathcal{V}_c$$

durch

$$\boxed{\frac{DV}{dt}(t) := P(c(t)) \left\{ \frac{d}{dt} V(t) \right\}}$$

wobei $P(c(t)) : \mathbb{R}^3 \to T_{c(t)}X$ die orthogonale Projektion auf die Tangentialebene $T_{c(t)}X$ bezeichnet. Es gilt dann die Produktregel

$$U, V \in \mathcal{V}_c : \frac{d}{dt}(U \cdot V) = \frac{DU}{dt} \cdot V + U \cdot \frac{DV}{dt}.$$

Sei $V \in \mathcal{V}_c$. Dann ist

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt} \left(v^\alpha X_{,\alpha}(\omega(t)) \right) =$$

$$\frac{d}{dt} v^\alpha \, X_{,\alpha}(\omega(t)) + v^\alpha \frac{d}{dt} X_{,\alpha}(\omega(t)) =$$

$$\dot{V}_\alpha \, X_{,\alpha}(\omega(t)) + V^\alpha \, X_{,\alpha\beta}(\omega(t)) \, \dot{\omega}_\beta(t) \,,$$

wobei $\dot{V}_\alpha = \frac{d}{dt} V_\alpha$, etc.

Wir haben die Gauß'sche Darstellungsformel (vgl. (1)' in §3)

$$X_{,\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_{,\gamma} + b_{\alpha\beta} N \,,$$

also $$\dot{V}(t) = \left[\dot{V}_\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega(t)) V_\alpha \dot{\omega}_\beta \right] X_{,\gamma}(\omega(t)) + V^\alpha b_{\alpha\beta} \dot{\omega}_\beta(t) N \,,$$

und für die Kovariante Ableitung folgt:

(1) $$\boxed{\frac{DV}{dt}(t) = \left[\dot{V}_\gamma(t) + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega(t)) V_\alpha(t) \dot{\omega}_\beta(t) \right] X_{,\gamma}(\omega(t))}$$

Sei nun c nach der Bogenlänge parametrisiert, also $|\dot{c}(\rho)| = 1$. In Kapitel II, §2, Gleichung (3) auf p. 158, wurde gezeigt ($\varkappa_g$ = geod. Krümmung, $\varkappa_n$ = Normalkr.)

$$\ddot{c}(\rho) = \varkappa_g \left(N(\omega(\rho)) \times \dot{c}(\rho) \right) + \varkappa_n N(\omega(\rho)) \,;$$

so dass

$$\frac{D}{d\rho}\,\dot{c}(\rho) = P(c(\rho))\,\ddot{c}(\rho) = \varkappa_g\, N(\omega(\rho)) \times \dot{c}(\rho).$$

Folglich ist die geodätische Krümmung $\varkappa_g(\rho)$ von $c(\rho)$ 0 genau dann, wenn

$$(2) \qquad \frac{D}{d\rho}\,\dot{c}(\rho) \equiv 0$$

ist. Mit (1) läßt sich (2) ($V = \dot{c} = \frac{d}{d\rho}(X \circ \omega) = X_{,\beta}(\omega)\,\dot{\omega}_\beta$, also $V_\beta = \dot{\omega}_\beta$):

$$(3) \qquad \ddot{\omega}_\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\omega)\,\dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}_\beta \equiv 0, \quad \gamma = 1,2.$$

<u>Definition 6</u>: a) Man nennt Kurven $X \circ \omega = c$, die den Gleichungen (3) genügen, <u>Geodätische auf X</u>, und (3) heißen <u>Differentialgleichungen der Geodätischen</u>. Hier wird nicht verlangt, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

b) Ein Vektorfeld $V(t) = V_\alpha(t)\,X_{,\alpha}(\omega(t)) \in V_c$

heißt _parallel längs c_, falls $\frac{DV}{dt} \equiv 0$, d.h. falls

(4) $$\boxed{\dot{V}_\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\omega)\, V_\alpha\, \dot{\omega}_\beta \equiv 0,\ \gamma = 1,2}$$ gilt (vgl. (1)).

[ c V ändert sich nicht in tang. Richtung]

Sind U, V _parallele Vektorfelder_ aus V_c, so ist

$$\frac{d}{dt}(U \cdot V) = U \cdot \frac{DV}{dt} + \frac{DU}{dt} \cdot V \equiv 0;$$

($\Rightarrow |U(t)| \equiv$ const mit der Wahl $V = U$!)

Speziell folgt für eine _Geodätische_

$$\frac{d}{dt}(\dot{c} \cdot \dot{c}) \equiv 0,$$

d.h. $|\dot{c}(t)| \equiv$ const. _Jede Geodätische ist automatisch proportional zur Bogenlänge parametrisiert_, und somit verschwindet die geodätische Krümmung, wenn man auf die Bogenlänge umparametrisiert (nur für diesen Fall war κ_g erklärt).

Wir betrachten jetzt das Längenfunktional

$$L(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt, \quad c = X \circ \omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Sei $V \in \mathcal{V}_c$ ein tangentiales Vektorfeld längs c. Man variiert c in Richtung von V, d.h. man betrachtet eine Schar

$\Psi(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon) \in [a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ von Kurven $\Psi(\cdot,\varepsilon)$ auf X mit

$$\Psi(t,0) = c(t), \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_0 \Psi(t,\varepsilon) = V(t).$$

Diese Schar gewinnt man z.B. durch die Setzung

$$\Psi(t,\varepsilon) = X\left(\omega(t) + \varepsilon \widetilde{V}(t)\right),$$

$$\widetilde{V}(t) := \left(DX_{\omega(t)}\right)^{-1}\left(V(t)\right) \in \mathbb{R}^2.$$

(Gemäß $V(t) \in T_{\dot{\omega}(t)} X$ ist $\widetilde{V}(t)$ wohldefiniert.)

Man betrachtet nun die 1^{te} Variation

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 L\left(\Psi(\cdot,\varepsilon)\right)$$

der Länge L an der Stelle c in Richtung V:

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial t} \psi(t,\varepsilon) \right| dt =$$

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi(t,\varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi(t,\varepsilon) \right]^{1/2} dt =$$

$$\int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(t,\varepsilon) \right) dt =$$

$$\int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \psi(t,\varepsilon) \right) dt =$$

$$\int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \dot{V}(t)\, dt = \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \frac{DV(t)}{dt} dt,$$

denn $\dot{c} \in V_c$, so dass $\dot{c} \cdot \dot{V} = \dot{c} \cdot \frac{DV}{dt}$.

Ist c proportional zur Bogenlänge parametrisiert,

also $|\dot{c}| \equiv \text{const} > 0$ und gilt $V(a) = V(b) = 0$,

so folgt:

$$\int_a^b |\dot{c}|^{-1} \dot{c}(t) \cdot \frac{DV}{dt}(t)\, dt =$$

$$|\dot{c}|^{-1} \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\dot{c}(t) \cdot V(t) \right) dt -$$

$$|\dot c|^{-1} \int_a^b V(t) \cdot \frac{D\dot c}{dt}(t)\, dt =$$

$$-|\dot c|^{-1} \int_a^b V(t) \cdot \frac{D\dot c}{dt}(t)\, dt =: \delta L(c, V).$$

Angenommen $L(c) \le L(\tilde c)$ für alle $\tilde c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\tilde c = X \circ \tilde\omega$, mit $\tilde c(a) = c(a)$, $\tilde c(b) = c(b)$. Ist

<u>c proportional zur Bogenlänge parametrisiert</u> und $V \in \mathcal{V}_c$ mit $V(a) = V(b) = 0$, so erfüllen die Kurven $\Psi(t,\varepsilon) :=$ $X(\omega(t) + \varepsilon \tilde V(t))$, $\tilde V(t) := \left(DX_{\omega(t)}\right)^{-1}(V(t))$, $\Psi(a,\varepsilon) = c(a)$, $\Psi(b,\varepsilon) = c(b)$, so dass $L(c) \le$ $L(\Psi(\cdot,\varepsilon))$, mithin

$$\delta L(c, V) = 0$$

für alle V wie oben; es folgt die bekannte Gleichung

$$(2) \quad \frac{D\dot c}{dt} \equiv 0,$$

<u>die Kurve c ist eine Geodätische.</u> Somit ergibt

sich die Gleichung (2) für Geodätische als Euler-Gleichung des Längenfunktionals, wenn man sich auf Kurven beschränkt, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Umgekehrt kann man zeigen, dass Geodätische zumindest lokal die Länge minimieren. Allerdings muss eine Geodätische nicht die kürzeste Verbindung auf der Fläche X zwischen ihrem Anfangs- und Endpunkt sein! (Teile von Großkreisen liefern Beispiele.)

Beispiele für Geodätische:

1.) Wir betrachten die Ebene $X : (u,v) \mapsto (u,v,0)$, also die Fläche $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Nach den Gauß'schen Darstellungsformeln gilt wegen $X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = 0$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$$

für alle $\alpha,\beta,\gamma \in \{1,2\}$, so daß sich die Gleichungen (3) für eine Geodätische $c = X \circ \omega$ reduzieren auf $\frac{d^2}{dt^2}\omega_\gamma = 0$,

$\gamma = 1,2$. Also ist $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ und damit natürlich auch $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $c = X \circ \omega$, affin linear.

2.) Geodätische auf dem Zylinder:

Sei Z der senkrechte Kreiszylinder über dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

a) Jeder Kreis auf Z, den man als Schnitt mit einer Ebene parallel zur xy-Ebene erhält, ist eine Geodätische auf Z.

Beweis: Ist $c(s)$ Parametrisierung eines solchen Kreises nach der Bogenlänge, o.E. $c(s) = (u(s), v(s), 0)$, so ist $\ddot{c}$ parallel zur Normalen an Z in $c(s)$, aus der Darstellung $\ddot{c} = \varkappa_g (N \times \dot{c}) + \varkappa_n N$ folgt $\varkappa_g = 0$.

b) Um weitere Geodätische zu finden, wählen wir die Para-

metrisierung $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u_1,u_2) := (\cos u_1, \sin u_1, u_2)$,

und beachten, dass X eine lokale Isometrie ist, vgl. §1,

die die Ebene auf Z abbildet. Es gilt:

> Unter lokalen Isometrien werden Geodätische auf Geodätische abgebildet.

Denn: Isometrien erhalten die Erste Fundamentalform und damit die Christoffel-Symbole, und nur diese gehen in die Gleichung (3) für Geodätische ein!

Also ergeben die X-Bilder von Geraden in der Ebene offenbar die Geodätischen auf Z.

Sei $p = X(0,0) = (1,0,0)$. Dann ist nach dem gerade Gesagten jede Geodätische auf Z durch p das X-Bild von Geraden $\omega(\rho) = \rho(a,b)$ in $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0)$, $a^2+b^2 = 1$.

$a = 0$: $X(\omega(\rho)) = (1, 0, \pm\rho)$

senkrechte Gerade durch p

$b = 0$: $X(\omega(\rho)) = (\cos\rho, \pm\sin\rho, 0)$

Kreislinie (vgl. a)

$a \neq 0 \neq b$: $X(\omega(\rho)) = (\cos(a\rho), \sin(a\rho), b\rho)$

Helix durch p

3.) Geodätische auf S^2:

Unter einem Großkreis auf S^2 versteht man den Schnitt von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung. Wie in 2.)a) überlegt man sich, dass für Großkreise $\varkappa_g \equiv 0$ gilt, diese also Geodätische auf S^2 sind. Sei $p \in S^2$ und $c: I \to S^2$ eine Geodätische. Dann wird genau ein Großkreis $\tilde{c}$ dadurch festgelegt, dass er durch p gehen soll und dort $\dot{c}(0)$ als Tangentenvektor hat. Nach der

Eindutigkeitsaussage für Geodätische folgt dann Spur $c \subset$ Spur $\tilde{c}$.

Satz 7 (lokale Existenz und Eindutigkeit von Geodätischen)

Es sei $X: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $S = X(\Omega)$. Ist $p \in S$ und $W_0 \in T_p S$ mit $W_0 \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindutig bestimmte Geodätische $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, mit $c(0) = p$ und $c'(0) = W_0 / |W_0|$.

Beweis: Es gelte $X^{-1}(p) = \tilde{p} \in \mathbb{R}^2$ sowie $w_0 := \left(DX_{\tilde{p}}\right)^{-1}\left(W_0/|W_0|\right)$. Dann löst man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\,\dot{\omega}_\alpha\,\dot{\omega}_\beta = 0 \,, & \gamma = 1,2 \,, \\ \omega(0) = \tilde{p} \,, \quad \dot{\omega}(0) = w_0 \,, \end{cases}$$

was nach Sätzen über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf einem passenden Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ möglich ist. $c(\rho) := X(\omega(\rho))$ ist dann die gesuchte Geodätische. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Theorie der gew. Dglen. □

Kommen wir zum Schluss zurück zum Begriff des parallelen Vektorfeldes. Ist $X: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Ebene, etwa $X(u,v) = (u,v,0)$, und $c: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve darin, so sind alle Vektorfelder $V(t)$ mit $V_3(t) \equiv 0$ tangential zu c. Offenbar ist $\frac{DV}{dt}(t) = \frac{d}{dt}V(t)$, denn $\frac{d}{dt}V(t) \in T_{c(t)}X = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Parallelität von V längs c heißt $\dot{V}(t) \equiv 0$, m.a.W.: Ist c eine ebene Kurve, so sind die zu c parallelen Vektorfelder genau

die konstanten Vektorfelder (in der entsprechenden Ebene).

Satz 8: Es sei $c = X \circ \omega$ mit einer Kurve $\omega : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ist $W_0 \in T_{c(t_0)} X$ mit einem $t_0 \in [a,b]$ fixiert, so gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $W \in V_c$ mit $W(t_0) = W_0$.

Beweis: Man löst das lineare System

$$\dot{W}_\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\omega) W_\gamma \dot{\omega}_\beta \equiv 0, \quad \gamma = 1,2,$$

zur entsprechenden Anfangsbedingung und setzt

$$W(t) = W_\gamma(t) X_{,\gamma}(\omega(t)).$$

□

Man nennt W die Parallelverschiebung längs c von W_0.