Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 10

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(P) = \sqrt{1 + |P|^2}$$

definierte Funktion. Zeigen Sie:

(a) f ist nicht negativ und es ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ streng konvex.

(b) Es gibt Funktionen $\lambda, \Lambda : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ mit $\lambda \leq \Lambda$, sodass gilt:

$$\lambda(P)|Q|^2 \leq D^2 f(P)(Q, Q) \leq \Lambda(P)|Q|^2$$

für alle $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Ermitteln Sie möglichst genaue Werte für $\lambda(P)$ und $\Lambda(P)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Betrachten Sie das Funktional

$$u_0 + \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{A}[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Funktional auf $u_0 + \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$ koerziv ist, d.h. es gibt $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sodass

$$\mathcal{A}[u] \geq \alpha \|u\|_{1,1;\Omega} + \beta,$$

(b) Es sei $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und $R > 0$ fest so gewählt, dass

$$L := \{u \in u_0 + \mathring{W}^{1,\infty}(\Omega) \ : \ \|u\|_{1,\infty;\Omega} \leq R\} \neq \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}[\,\cdot\,] \to \min$ eine Lösung in L besitzt.
(*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz von Arzelà-Ascoli und Aufgabe 3)

(c) Interpretieren Sie das Funktional $\mathcal{A}$ geometrisch.

Aufgabe 3 (*)

Die Menge L sei definiert wie in Aufgabe 2 (b). Zeigen Sie: Ist $(z_n) \subset L$ eine Folge, die gleichmäßig gegen $z \in L$ konvergiert, so gilt

$$\mathcal{A}[z] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{A}[z_n].$$

Aufgabe 4 (*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Der Raum $W^{-k,p}(\Omega)$ ist definiert als der Dualraum von $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$. Zeigen Sie:
$W^{-k,p}(\Omega)$ kann mit dem Raum aller Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ identifizert werden, die sich in der Form

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha v_\alpha$$

für irgendwelche $v_\alpha \in L^q(\Omega)$ darstellen lassen. Hierbei bezeichnet q wie üblich den zu p konjugierten exponenten.

Abgabe: Am Montag, den 13. Juli vor der Vorlesung.