Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 4

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (*)

Sei X ein Banachraum.

(a) Eine Folge $(f_n) \subset X^*$ heißt schwach* konvergent gegen $f \in X^*$, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Zeigen Sie: Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach* Folgenkonvergenz in X^* überein.

(b) Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.

(c) Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

(d) Ist X endlich-dimensional, so ist X reflexiv. *(Hinweis: Verwenden sie Teil (c)!)*

Aufgabe 2 (1+1+1+2 Punkte)

Seien $u, u_m : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{N})$ gegeben durch $u(x) := 1$, $u_m(x) := 1 + \sin(mx)$. Zeigen Sie:

(a) $\| u \|_1 = \| u_m \|_1 = 2\pi$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(b) $u_m \overset{m}{\not\to} u$ in $L^1([0, 2\pi])$.

(c) $u_m \overset{m}{\not\to} u$ $\mathcal{L}^1$-f.ü in $[0, 2\pi]$.

(d) $u_m \overset{m}{\rightharpoonup} u$ in $L^1([0, 2\pi])$.

(Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\lim\limits_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \sin(mx)\varphi(x)dx = 0$ *für alle* $\varphi \in L^1([0, 2\pi])$ *gilt.)*

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) In $\mathbb{R}^n$ sind schwache und starke Konvergenz äquivalent. Folgern Sie die Gültigkeit der Aussage für beliebige endlich-dimensionale Vektorräume.

(b) Betrachten Sie die Folge $(x_n) \subset \ell^2$; gegeben durch

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{log(n+1)}, & k \in \{1, 2, ..., n+1\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was kann man über die komponentenweise, schwache und starke Konvergenz von (x_n) sagen?

Aufgabe 4 (*)

Seien $(X, \| \,.\, \|)$ ein normierter Raum und $\beta : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie:

(a) Durch die Vorschrift

$$\| (x, y) \| := \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2} \tag{1}$$

wird eine Norm auf $X \times X$ erklärt.

(b) β ist genau dann stetig (im Sinne von $\| \beta \| < \infty$ bzgl. der in (a) definierten Norm auf $X \times X$) und koerziv, wenn es positive Konstanten λ und Λ gibt, so dass:

$$|\beta(x, y)| \leq \Lambda \| x \| \| y \| \quad \text{und} \quad \beta(x, x) \geq \lambda \| x \|^2$$

für alle $x, y \in X$.

Abgabe: Am Mittwoch, den 27. Mai vor der Vorlesung.