Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 6

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der *Sobolev-Raum* $W^{k,p}(\Omega)$ ist definiert als die Menge aller Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ für die alle partiellen schwachen Ableitungen $\partial^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$ existieren und p-integrierbar sind zusammen mit der Norm

$$\| u \|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, |\alpha| \leq k} \| \partial^\alpha u \|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}$$

wenn $p < \infty$, bzw.

$$\max_{|\alpha| \leq k} \| \partial^\alpha u \|_{\infty,\Omega} \qquad \text{für } p = \infty.$$

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die *totale Variation* einer Funktion $u \in L^1(\Omega)$ ist definiert durch

$$\| u \|_{V(\Omega)} = \sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} v dx \mid v \in C_0^1(\Omega)^n \text{ mit } |v(x)| \leq 1 \; \forall x \in \Omega \right\},$$

wobei $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i$. $BV(\Omega)$ ist der Raum der Funktionen mit beschränkter Variation und wird mit

$$\| u \|_{BV(\Omega)} = \| u \|_{1,\Omega} + \| u \|_{V(\Omega)}$$

normiert.

(a) Bestimmen Sie $\| u \|_{V(\Omega)}$ für $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = \operatorname{sign}(x)$. Wie ändert sich die totale Variation, wenn man $\Omega = [-1, 1]$ setzt?

(b) Sei $(u_n) \subset BV(\Omega)$ eine Folge die in $L^1(\Omega)$ gegen eine Funktion u konvergiert. Zeigen Sie, dass dann

$$\| u \|_{V(\Omega)} \leq \liminf_{n \to \infty} \| u_n \|_{V(\Omega)}$$

gilt.

(c) Weisen Sie nach, dass $BV(\Omega)$ mit der angegebenen Norm ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 2 (*)

Zeigen Sie, dass $W^{1,1}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $BV(\Omega)$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\| \,.\, \|_{BV(\Omega)}$ auf $W^{1,1}(\Omega)$ äquivalent zu $\| \,.\, \|_{1,1,\Omega}$ ist.

Aufgabe 3 (*)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in \{1, ..., n\}$ und $u, w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

(i) w ist die α-te schwache (partielle) Ableitung von u auf Ω, also $w = \partial_\alpha u$.

(ii) Es gibt eine Folge $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_n \to u \quad \text{und } \partial_\alpha u_n \to w \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

(iii) Für $0 < h \ll 1$ ist der Differenzenquotient $\Delta^h_\alpha u(x) := \frac{u(x+he_\alpha)-u(x)}{h}$ $\mathcal{L}^n$-f.ü. definiert mit

$$\Delta^h_\alpha u \xrightarrow{h} w \;\text{ in } L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $q := p/(p-1)$ (bzw. $q = \infty$ für $p = 1$). Es seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$. Zeigen Sie die *schwache* Form der Produktregel, d.h. für $\alpha \in \{1, ..., n\}$ besitzt uv eine α-te schwache Ableitung und es gilt

$$\partial_\alpha(uv) = u\partial_\alpha v + v\partial_\alpha u.$$

Hinweis: Approximieren sie die Funktionen durch C^∞-Funktionen.

Abgabe: Am Montag, den 8. Juni vor der Vorlesung.