Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 8

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie:

(a) Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine $W^{1,\infty}(\Omega)$-Funktion.

(b) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p < \infty$ und $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{D}[w] := \int_\Omega |\nabla w|^p dx$$

in der Menge $u_0 + \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ ein eindeutiges Minimum besitzt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass jede Minimalfolge des Problems eine in $W^{1,p}$ schwach konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm, dass der in (i) erhaltene Limes das Minimierungsproblem löst und zeigen Sie die Eindeutigkeit.

Aufgabe 3 (*)

Sei

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x^2\}.$$

Zeigen Sie, dass die Einbettung $W^{1,p} \to C^0(\overline{\Omega})$ für dieses Gebiet nicht für alle $p > 2$ richtig ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Wir sagen, u besitzt *lokal* eine γ-te schwache (Richtungs-)Ableitung ($\gamma \in \{1, ..., n\}$), wenn es zu jedem $x \in \Omega$ eine offene Umgebung U von x und eine Funktion $v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ gibt, sodass

$$\int\limits_U u \partial_\gamma \varphi dx = \int\limits_U v \varphi dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$ gilt. Zeigen Sie: Besitzt u lokal eine γ-te schwache Ableitung, so besitzt u auch global eine γ-te schwache Ableitung auf Ω.

Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Überdeckung von Ω durch offene Mengen und betrachten Sie eine Zerlegung der 1.

Abgabe: Am Montag, den 29. Juni vor der Vorlesung.