Aufgabe 1. 12 P.

Es seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$f_1\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2+2}{x+1},$$
$$f_2\colon [0;2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\pi x),$$
$$f_3\colon \{2,4\}\times\{1,2\} \to \{1,2,4\},\ (n,m) \mapsto \frac{n}{m}.$$

(i) (3.5 P.) Sei $A = \{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Bestimmen Sie das Bild von A unter f_1, d.h. $f_1(A)$.

(ii) (3.5 P.) Sei $B = \{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Bestimmen Sie das Urbild von B unter f_2, d.h. $f_2^{-1}(B)$.
(*Hinweis: Benutzen Sie die Tabelle.*)

(iii) (5 P.) Untersuchen Sie f_3 auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Aufgabe 2. 12 P.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(i) (4 P.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) (4 P.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $3^n > 2n$. (*Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $3^n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*)

(iii) (4 P.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2^n + 3^n - 5^n$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 3. 13 P.

(i) (9 P.) Seien
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Inverse Matrix A^{-1} zu A und lösen Sie mit Hilfe von A^{-1} das Gleichungssystem $Ax = b$. (*Hinweis: Die Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.*)

(ii) (4 P.) Bestimmen Sie die Determinante von
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 39 & 19 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 42 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
und folgern Sie, dass C invertierbar ist.

Aufgabe 4. 13 P.

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. 16 P.

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(\sin(x)+x) + \ln(x+1),$$
$$g\colon (-\infty;1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x-1}.$$

(i) (7.5 P.) Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom von f in $a = 0$.

(ii) (8.5 P.) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom von g in $a = 0$.

Aufgabe 6. 13 P.

Seien

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 2x_1 + \exp(x_2) - x_2,$$
$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^2}{2} - 4x_1 + x_1x_2 - \frac{x_2^2}{2}.$$

(i) (6 P.) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(ii) (7 P.) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von $\tilde{f}$.

Aufgabe 7. 10 P.

Betrachten Sie die folgenden Messdaten:

t	-1	0	1	2
y	6	0	4	6

Bestimmen Sie ein Polynom 3. Grades, das die Messdaten interpoliert.

(*Hinweis: Die Koeffizienten des Polynoms sind ganzzahlig.*)

Aufgabe 8. 11 P.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) (1.5 P.) $\displaystyle\int_1^2 \exp(\ln(x^2))\,\mathrm{d}x$,

(ii) (3.5 P.) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x$,

(iii) (3 P.) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\exp(x^3)\,\mathrm{d}x$,

(iv) (3 P.) $\displaystyle\int_0^1 2x(x^2-1)^{10}\,\mathrm{d}x$.