UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Jens Horn, M.Sc.
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2019/20

Blatt 2 (Gesamtpunktzahl: 18 (+3) P.) **Abgabetermin:** 15.11.2019, 12:00

Hinweis: Sie benötigen

- mindestens **9 Punkte** für **1 Bonuspunkt**,
- mindestens **14,5 Punkte** für **einen weiteren Bonuspunkt** (insg. **2 Bonuspunkte**).

Übung 1. 4 (+1) P.
Geben Sie nichtleere Mengen $D \subseteq \mathbb{Z}$ und $W \subseteq \mathbb{Z}$ an, sodass die Abbildung

$$f\colon D \to W,\ x \mapsto |x|$$

die folgenden Eigenschaften hat.

(i) (1 P.) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(ii) (1 P.) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(iii) (1 P.) f ist weder surjektiv noch injektiv.

(iv) (1 P.) f ist bijektiv.
(+1 P.) Geben Sie die entsprechende Umkehrabbildung an.

Übung 2. 5 (+2) P.
Geben Sie eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften an.

(i) (1 P.) $f_1\colon [0,1] \to [0,1]$ ist injektiv, nicht surjektiv, aber streng monoton fallend.

(ii) (1 P.) $f_2\colon [0,1] \to [0,1]$ ist surjektiv, nicht injektiv, aber monoton wachsend.

(iii) (1 P.) $f_3\colon [0,1] \to [0,1]$ ist bijektiv und streng monoton wachsend.
(+1 P.) Geben Sie die entsprechende Umkehrabbildung an.

(iv) (1 P.) $f_4\colon [0,1] \to [0,1]$ ist bijektiv und weder monoton wachsend noch fallend.
(+1 P.) Geben Sie die entsprechende Umkehrabbildung an.

(v) (1 P.) $f_5\colon [0,1] \to [0,1]$ ist monoton wachsend und weder surjektiv noch injektiv.

(bitte wenden)

Übung 3. 6 P.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(i) (2 P.) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(ii) (2 P.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar.

(iii) (2 P.) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, gilt $n^2 \geq 2n + 1$.

Übung 4. 3 P.

Sei $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ durch die Formel

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Beweisen Sie durch starke vollständige Induktion, dass

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.