UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Jens Horn, M.Sc.
Dr. Dominik Schillo

Präsenzübungen zur Vorlesung
Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2019/20

Blatt 5 **Abgabetermin:** /

Übung 1.
Untersuchen Sie die folgende Matrix auf Invertierbarkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Übung 2.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Dimension n:

$$\det(A^{(n)}) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Übung 3.
Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e & \pi & 2323 & 76 & -4 \\ 0 & 3 & \frac{\pi}{4} & \frac{e+4}{\pi^2} & -56 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & 2,6542 & 10^{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & e^2 & 18,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 100\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Übung 4.
Wir nennen einen Vektor $v \neq 0$(!) einen *Eigenvektor* der Matrix A zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$Av = \lambda v \quad (\iff (A - \lambda E_n)v = 0).$$

Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn $A - \lambda E_n$ nicht invertierbar ist, d.h.

$$\det(A - \lambda E_n) = 0.$$

(Das Polynom auf der linken Seite nennt man *charakteristisches Polynom (der Matrix A)*.)

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(bitte wenden)

Übung 5.
Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$$f\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(\cos(x) + \ln(x+1)),$$
$$g\colon \left(-\frac{1}{2};\infty\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\sqrt{2x+1}) + 3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}.$$

(i) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ für alle $x \in (-1;\infty)$.

(ii) Bestimmen Sie $g'(x)$ für alle $x \in \left(-\frac{1}{2};\infty\right)$.