Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

18.10.2019

Definition

“Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.”

Die Objekte, die zu einer Menge zusammengefasst sind, heißen **Elemente** dieser Menge. Eine Menge **enthält** ihre Elemente.

Mengenlehre I

Bemerkung

- Wir können Mengen auf zwei unterschiedliche Arten beschreiben:
  1. Aufzählung, z.B. $\{a, b, c, d\}$,
  2. Charakterisierende Eigenschaft, z.B. $\{x \ : \ x \text{ ist ein Mensch}\}$.
- Mengen können aus ganz unterschiedlichen Dingen bestehen, z.B. $\{\text{Tisch}, a, \otimes, +\}$.

Mengenlehre II

Seien M und N Mengen.

- $x \in M$: „x ist Element von M“
  Beispiel: $a \in \{a, b, c\}$
- $M \cap N = \{x \ : \ x \in M \wedge x \in N\}$: „Schnitt von M und N“
  Beispiel: $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$
- $M \cup N = \{x \ : \ x \in M \vee x \in N\}$: „Vereinigung von M und N“
  Beispiel: $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $M \subset N$: Für alle $x \in M$ gilt $x \in N$. „M ist eine Teilmenge von N.“
  Beispiel: $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$
- $M = N$: $M \subset N$ und $N \subset M$. „Die Mengen M und N sind gleich.“
  Beispiel: $\{a, \ldots, z\} = \{\square \ : \ \square \text{ Buchstabe im lat. Alphabet}\}$

Mengenlehre III

- Falls $N \subset M$: $M \setminus N = \{x \ : \ x \in M \wedge x \notin N\}$: „Komplement von N in M“
  Beispiel: $\{a, b, c\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $M \times N = \{(x, y) \ : \ x \in M \wedge y \in N\}$: „Kreuzprodukt von M und N“
  Beispiel:
  $\{a, b, c\} \times \{a, b\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$
- $\emptyset$: „Leere Menge“
- $P(M) = \{L \ : \ L \subset M\}$: „Potenzmenge von M“
  Beispiel: $P(\{a, b, c\}) =$
  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Natürliche Zahlen I

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

die *natürlichen Zahlen*. Falls wir die 0 einschließen wollen, schreiben wir

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Achtung: Diese Konvention ist nicht einheitlich. Verschiedene Bücher/Dozenten benutzen verschiedene Definitionen (mit oder ohne 0) der natürlichen Zahlen.

Wir können „auf“ $\mathbb{N}$ immer addieren und multiplizieren, d.h.

$$n + m \quad \text{und} \quad n \cdot m$$

sind für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert.

Natürliche Zahlen II

Wir können Addition und Multiplikation auch Verschachteln, z.B.

$$18 \cdot (4 + (7 \cdot 4)),$$

wobei wir die Klammern benutzen um eine Reihenfolge der Rechenoperationen (innere Klammern zuerst) festzulegen.

$$18 \cdot (4 + 7 \cdot 4)$$

wird.

$$18 \cdot (4 + 7 \cdot 4) = 18 \cdot (4 + 28) = 18 \cdot 32 = 576$$

und

$$18 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 72 + 28 = 100$$

nicht gleich sind.

Rechenregeln

Für alle $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

- $l + m = m + l$ *(Kommutativität der Addition)*
- $l + (m + n) = (l + m) + n = l + m + n$ *(Assoziativität der Addition)*
- $n + 0 = 0 + n = n$ *(0 ist neutrales Element der Addition)*
- $l \cdot m = m \cdot l$ *(Kommutativität der Multiplikation)*
- $l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n = l \cdot m \cdot n$ *(Assoziativität der Multiplikation)*
- $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ *(1 ist neutrales Element der Multiplikation)*
- $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$ *(Distributivität)*

Diese Regeln gelten auch für alle kommenden Zahlenbereiche.

Ganze Zahlen

Wir können die Gleichung

$$4 + n = 5$$

in $\mathbb{N}$ lösen (d.h. es gibt eine natürliche Zahl n, die diese Gleichung erfüllt), aber

$$4 + n = 3 \qquad (*)$$

ist nicht mehr in $\mathbb{N}$ lösbar. Man kann für jede natürliche Zahl n eine neue Zahl $-n$ „konstruieren", die

$$n + (-n) = 0 \qquad (\text{z.B. } 2 + (-2) = 0)$$

erfüllt. Diese Gleichung schreiben wir auch abkürzend $n - n = 0$. Wir haben damit die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

eingeführt. Die Gleichung (*) ist nun in $\mathbb{Z}$ lösbar ($n = -1$).

Rechenregeln

Für alle $l, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

- $l + m = m + l$ *(Kommutativität der Addition)*
- $l + (m + n) = (l + m) + n = l + m + n$ *(Assoziativität der Addition)*
- $n + 0 = 0 + n = n$ *(0 ist neutrales Element der Addition)*
- $l \cdot m = m \cdot l$ *(Kommutativität der Multiplikation)*
- $l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n = l \cdot m \cdot n$ *(Assoziativität der Multiplikation)*
- $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ *(1 ist neutrales Element der Multiplikation)*
- $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$ *(Distributivität)*
- $l + (-l) = 0$ *(Es gibt zu l ein additives Inverses $(-l)$)*

Rationale Zahlen/Brüche I

Die Gleichung

$$(-2) \cdot m = 4$$

ist in $\mathbb{Z}$ lösbar, aber

$$3 \cdot m = 4 \qquad (**)$$

nicht mehr. Man kann nun für jede Zahl $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine neue Zahl (*Bruch* oder *rationale Zahl*) $\frac{p}{q}$ konstruieren, die

$$q \cdot \frac{p}{q} = p$$

erfüllt. Wir nennen p den *Zähler* und q den *Nenner*.

Rationale Zahlen/Brüche II

Diese Zahl ist nicht eindeutig, z.B. haben die Gleichungen

$$3 \cdot x = 9 \quad \text{und} \quad 9 \cdot x = 27$$

beide die Lösungen 3, aber auch $\frac{9}{3}$ bzw. $\frac{27}{9}$.

Definition

Seien $p, r \in \mathbb{Z}$ und $q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir definieren:

- Es gilt genau dann $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, wenn $p \cdot s = r \cdot q$.
- $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s + r \cdot q}{qs}$ (Addition).
- $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ (Multiplikation).

Wir bezeichnen mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

Rationale Zahlen/Brüche III

Rechenregeln

Seien $p, r \in \mathbb{Z}$ *und* $q, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. $\frac{p \cdot x}{q \cdot x} = \frac{p}{q}$ *für alle* $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *(„Kürzen/Erweitern")*
2. $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$
3. *Wir identifizieren* p *mit* $\frac{p}{1}$.

Bemerkung

Es ist hilfreich, wenn man bei der Addition zweier Brüche diese zunächst auf den gleichen Nenner („gemeinsamer Nenner") bringt, wobei dieser möglichst klein sein sollte. Wir kombinieren damit also die Regeln (1) und (2).

Rationale Zahlen/Brüche IV

Beispiel

- $\frac{3}{4}\frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$
- $\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 7 \cdot 4}{4 \cdot 6} = \frac{46}{24}$
- $\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{14}{12} = \frac{23}{12}$
- $\frac{46}{24} = \frac{23 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{23}{12}$

Rechenregeln

Für alle $l, m, n \in \mathbb{Q}$ gilt

1. $l + m = m + l$ *(Kommutativität der Addition)*
2. $l + (m + n) = (l + m) + n = l + m + n$ *(Assoziativität der Addition)*
3. $n + 0 = 0 + n = n$ *(0 ist neutrales Element der Addition)*
4. $l + (-l) = 0$ *(Es gibt zu l ein additives Inverses $(-l)$)*
5. $l \cdot m = m \cdot l$ *(Kommutativität der Multiplikation)*
6. $l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n = l \cdot m \cdot n$ *(Assoziativität der Multiplikation)*
7. $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ *(1 ist neutrales Element der Multiplikation)*
8. $l \cdot l^{-1} = 0$ *(Es gibt zu l ein multiplikatives Inverses l^{-1})*
9. $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$ *(Distributivität)*

Körper

Definition

Ein **Körper** ist eine mit zwei Verknüpfungen + (‘Addition’) und . (’Multiplikation’) versehene nichtleere Menge $\mathbb{K}$, die die Eigenschaften 1–9 haben.

Bemerkung

- In der Regel verwenden wir die Schreibweise $(\mathbb{K}, +, .)$ für einen Körper.
- Insgesamt besagen diese Eigenschaften, dass die ‘üblichen’ Regeln der Arithmetik innerhalb eines Körpers gelten.

Reelle Zahlen I

Die Gleichung

$$x^2 = 4$$

ist in $\mathbb{Q}$ (sowie auch in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$) lösbar, aber

$$x^2 = 2$$

nicht mehr. Die Lösung $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch schreiben und ist eine **irrationale** Zahl, das heißt sie ist keine rationale Zahl.

Reelle Zahlen II

Beispiel

- $0,112123123412345123456\ldots$
- $\sqrt{2}$
- π
- e

Definition

Die Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen nennen wir die *reellen Zahlen* und schreiben sie als $\mathbb{R}$.

Zahlenmengen

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$: „Natürliche Zahlen mit 0“
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$: „Natürliche Zahlen“
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: „Ganze Zahlen“
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$: „Rationale Zahlen“
- $\mathbb{R}$: „Reelle Zahlen“

Es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ungleichungen I

Es existiert eine Aussageform "$x < y$" mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle Zahlen x, y gilt
   eine der Beziehungen $x = y, x < y$ oder $y < z$.
2. Für alle Zahlen x, y, z gilt:
   wenn $x < y$ gilt, so ist $x + z < y + z$,
3. wenn $x < y, 0 < z$ gilt, so ist $xz < yz$,
4. wenn $x < y, y < z$ gilt, so ist $x < z$.

Damit erhalten wir weitere Regeln. Für beliebige x, y, z, w Zahlen gilt:

1. wenn $x < y$ ist, so gilt $-y < -x$,
2. wenn $0 < x < y$ ist, so gilt $< y^{-1} < x^{-1}$,
3. $x^2 \geq 0$.

Ungleichungen II

Wie kann man einfach entscheiden, ob ein Bruch größer oder kleiner einem anderen Bruch ist?

Verfahren

Seien $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ zwei Brüche.

$$\frac{p}{q} \square \frac{r}{s}$$

- *Zunächst erweitern wir einen Bruch mit (-1), falls der Nenner negativ ist (z.B. $\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$). Wir können also ab jetzt annehmen, dass die Nenner positiv sind.*
- *Wir multiplizieren beide Seiten mit den positiven Nennern.*
- *Das Zeichen, das im letzten Schritt passt, passt auch am Anfang.*

Ungleichungen III

Beispiel

$$\frac{5}{-8} \Box \frac{-7}{13}$$

- $\frac{-5}{8} \Box \frac{-7}{13}$
- $-5 \cdot 13 \Box -7 \cdot 8$, d.h. $-65 \Box -56$
- $-65 < -56$.

Also

$$\frac{5}{-8} < \frac{-7}{13}.$$

Ungleichungen IV

Für welche Zahlen x gilt die Ungleichung $4x + 3 \leq 19$?

Antwort

Wir wenden die eben angegebenen Rechenvorschriften für Ungleichungen an und subtrahieren auf beiden Seiten die Zahl 3.
Damit erhalten wir $4x \leq 16$.
Nun teilen wir die Ungleichung durch die positive Zahl 4, d.h. bei der Division dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um, sondern bleibt erhalten.
Wir sehen also, dass $x \leq 4$ und somit ist die gesuchte Menge $\{x : x \leq 4\}$.

Intervalle I

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \wedge x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$: „Abgeschlossenes Intervall“
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$: „Offenes Intervall“
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}$: „Halboffenes Intervall“
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}$: „Halboffenes Intervall“
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\}$

Intervalle II

Beispiel