# Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

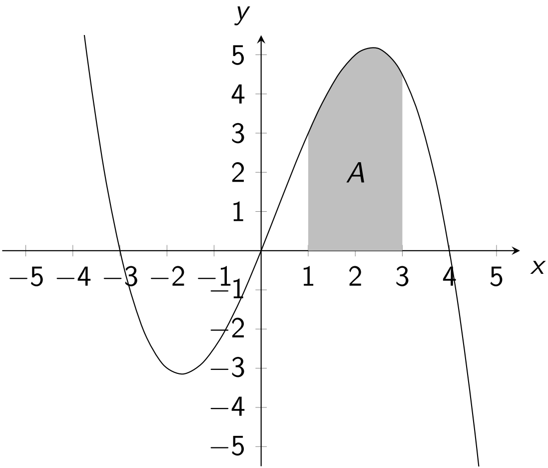
basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

17.01.2020

# Integralrechnung

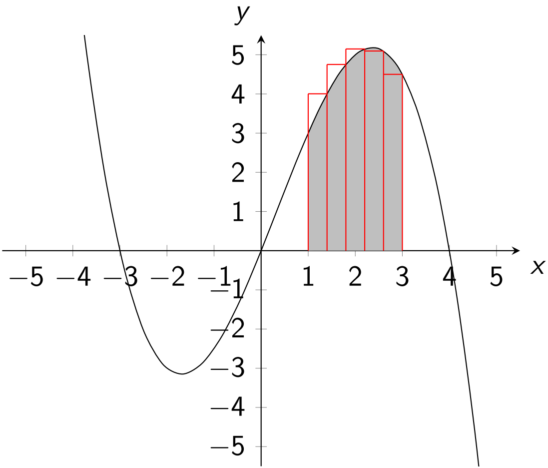
Wir wollen uns im Folgenden mit der Berechnung des Flächeninhalts zwischen einem Funktionsgraphen und der $x$-Achse beschäftigen. Im Folgenden sollen die betrachteten Funktionen $f$ immer „hinreichend gut“ sein (stetig, differenzierbar etc) und stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sein.


y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
A

Wir unterteilen das Intervall $[a; b]$ in kleinere Teilintervalle, z. B. können wir eine *äqudistante Zerlegung* uns anschauen, d. h.

$$[a; b] = [a; a + \Delta x] \cup [a + \Delta x; a + 2\Delta x] \cup \ldots \cup [a + (n-1)\Delta x; b]$$

für ein $n \in \mathbb{N}$, wobei $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.


y
5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
x
−1
−2
−3
−4
−5

Der Flächeninhalt $A$ lässt sich also durch die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke approximieren:

$$\begin{aligned} &\Delta x \cdot f(a+\Delta x) + \Delta x \cdot f(a+2\Delta x) + \cdots + \Delta x \cdot f(b) \\ &= \left(f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \cdots + f(b)\right)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x. \end{aligned}$$

Wenn wir zum Grenzwert für $n \to \infty$ übergehen, erhalten wir den Flächeninhalt.

**Definition**

Das *Integral von f über [a;b]* ist definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x.$$

Die Funktion $f$ heißt dann *Integrand*.

## Rechenregeln

*Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\int_a^b 0 \, \mathrm{d}x = 0$,
2. $\int_a^b f(x) + g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$,
3. $\int_a^b \alpha f(x) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$,
4. $\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0$,
5. $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$ *für* $a \leq c \leq b$,
6. $\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$,
7. $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$, *falls* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a; b]$.

## Frage

Gibt es eine weitere Möglichkeit Integrale auszurechnen ohne Approximation durch Rechtecke?

## Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* $f$, falls $F' = f$.

## Bemerkung

Sind $F_1$ und $F_2$ zwei Stammfunktionen von $f$, dann gibt es eine reelle Zahl $c$, sodass

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich also höchstens um eine Konstante.

## Beispiel

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Dann ist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion $f$, da
$$F'(x) = \frac{1}{3}\left(3 \cdot x^{3-1}\right) = x^2 = f(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\tilde{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 5$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $f$.
2. Sei $g\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist $G\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$ eine Stammfunktion von $g$.
3. Da
$$\exp'(x) = \exp(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist exp eine Stammfunktion von exp.

Der nächste Satz verknüpft die Differentialrechnung mit der Integralrechnung und gibt uns eine Möglichkeit Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen zu berechnen.

**Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**

*Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:*

1. *Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist eine Stammfunktion von $f$.*
2. *Ist $\tilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$, dann gilt*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [\tilde{F}(x)]_a^b = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a).$$

## Bemerkung

Aufgrund des letzten Satzes schreibt man auch oft

$$F = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist eine reine Schreibweise! Hierbei ist wieder zu beachten, dass eine Stammfunktion nur eindeutig bis auf eine Konstante ist.

Im Folgenden wollen wir einige wichtige Stammfunktionen festhalten:

| f(x) | F(x) |
|---|---|
| $x^r$ | $\frac{1}{r+1}x^{r+1} \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(\lvert x \rvert)$ |
| $\exp(x)$ | $\exp(x)$ |
| $\ln(x)$ | $x\ln(x) - x$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |

Wir wollen nun mit Hilfe von Stammfunktionen Integrale berechnen.

## Beispiel

1. Wir wollen das Integral von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) + x^2$ über $[0;1]$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \exp(x) + x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \exp(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\
&= [\exp(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= \exp(1) - \exp(0) + \frac{1}{3} - 0 \\
&= e - \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

## Beispiel

2 Wir wollen das Integral von

$$g\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \sin(x) - 2\cos(x)$$

über $[\pi; 2\pi]$ bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) - 2\cos(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x - 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} - 2[\sin(x)]_{\pi}^{2\pi} \\
&= (-\cos(2\pi) + \cos(\pi)) - 2\left(\sin(2\pi) - \sin(\pi)\right) \\
&= (-1-1) - 2(0-0) = -2.
\end{aligned}$$

## Beispiel

3. Wir wollen das Integral
$$\int_{-1}^{0} x\exp(x)\ \mathrm{d}x$$
berechnen. Unsere bisherigen Rechenregeln helfen uns nicht weiter, da wir ein Produkt als Integranden haben.

Um das Beispiel berechnen zu können benötigen wir folgende Regel, die sich aus der Produktregel herleiten lässt.

## Satz (Partielle Integration)

*Seien $f, g$ Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

*bzw.*

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

## Beispiel

Setzen wir

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x\exp(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [F(x)g(x)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} F(x)g'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [\exp(x)x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \exp(x)\cdot 1\ \mathrm{d}x \\
&= (0 - \exp(-1)(-1)) - [\exp(x)]_{-1}^{0} \\
&= \exp(-1) - (\exp(0) - \exp(-1)) \\
&= -1 + 2\exp(-1).
\end{aligned}$$

## Bemerkung

Würden wir im letzten Beispiel die Rollen von $f$ und $g$ vertauschen, so würden wir mit der partiellen Integration nicht weiterkommen. Es ist also wichtig die Funktionen geeignet zu wählen!

## Beispiel

1. Wir wollen nun die Stammfunktion von ln bestimmen. Es gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x,\end{aligned}$$

wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \quad \text{und} \quad g = \ln\,.$$

## Beispiel

2. Wie finden wir eine Stammfunktion zu $\sin^2$?
   Mit $f = g = \sin$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int \sin(x) \cdot \sin(x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) - \int (-\cos(x)) \cdot \cos(x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin(x)^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

## Beispiel

Durch Umformen erhalten wir schließlich

$$\int \sin(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\sin(x) + x\right).$$

Damit ist

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\sin(x) + x\right)$$

eine Stammfunktion von $\sin^2$.

Die „Umkehrung“ der Kettenregel ist die Substitutionsregel:

**Satz (Substitutionsregel)**

*Sei u eine Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

*bzw.*

$$\int f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_{u(a)}^{u(b)} = [F(u(t))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)).$$

## Beispiel

2. $\int_a^b u(t)^{n-1}u'(t)\,\mathrm{d}t = ?, n \in \mathbb{N}$. Mit $f(x) = x^{n-1}$ und $F(x) = \frac{x^n}{n}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)^{n-1}u'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [F(u(t))]_a^b\\ &= \frac{1}{n}\,[u(t)^n]_a^b\\ &= \frac{1}{n}(u(b)^n - u(a)^n).\end{aligned}$$

## Beispiel

3. Mit $f(x) = x, F(x) = \frac{x^2}{2}$ und $u(t) = \sin(t)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [F(u(t))]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(t)^2\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(\pi/2)^2 - \sin(0)^2\right)\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass eine Stammfunktion von $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sin(t)\cos(t)$ gegeben ist durch

$$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{2}\sin(t)^2.$$

## Beispiel

4. $\int_a^b t\exp(t^2)\,\mathrm{d}t = ?$. Mit $u(t) = t^2$ und $u'(t) = 2t$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b t\exp(t^2)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{1}{2}u'(t)\exp(u(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \exp(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}[\exp(x)]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{2}[\exp(t^2)]_a^b\\ &= \frac{1}{2}(\exp(b^2) - \exp(a^2)).\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass eine Stammfunktion von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t\exp(t^2)$ gegeben ist durch

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{2}\exp(t^2).$$

## Beispiel

5. $\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t =?$. Mit $u(t) = t+1$ und $u'(t) = 1$ folgt

$$\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{u(t)-1}{\sqrt{u(t)}}\,\mathrm{d}t,$$

sodass $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ die Lösung

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^3 \frac{u(t)-1}{\sqrt{u(t)}} u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^4 = \frac{2}{3}(2+\sqrt{2})\end{aligned}$$

liefert.

## Beispiel

Die Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned} H\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto &\frac{2}{3}(u(t))^{\frac{3}{2}} - 2(u(t))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2(t+1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von

$$h\colon (-1;\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t+1}}$$

ist.