Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

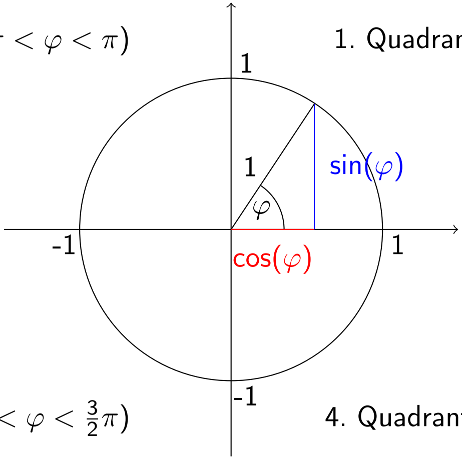
basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

24.01.2020

2. Quadrant $(\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi)$

1. Quadrant $(0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi)$



3. Quadrant $(\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi)$

4. Quadrant $(\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi)$

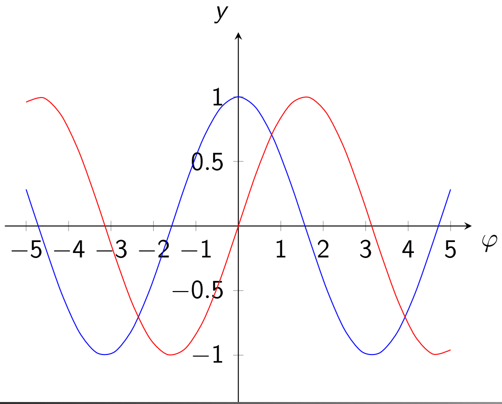
Achtung: Wir geben Winkel immer im Bogenmaß an! $(180^\circ \hat{=} \pi)$

Definition

Die Funktionen

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \sin(\varphi)$$

nennen wir *Cosinus* bzw. *Sinus*.



Bemerkung

- Die Funktionen sin und cos sind 2π-periodisch, d. h. es gilt
$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$$
für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$$\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1$$
für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Es gilt
$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$
sowie
$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{1}{2}\pi\right)$$
für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Wichtige Werte von Cosinus und Sinus

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$
0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

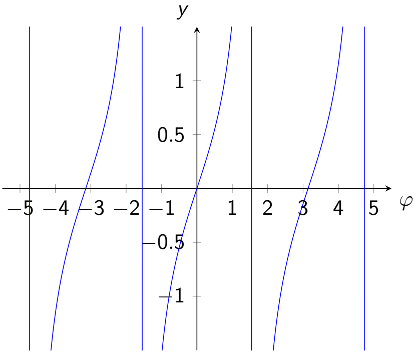
φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$
π	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	1	0

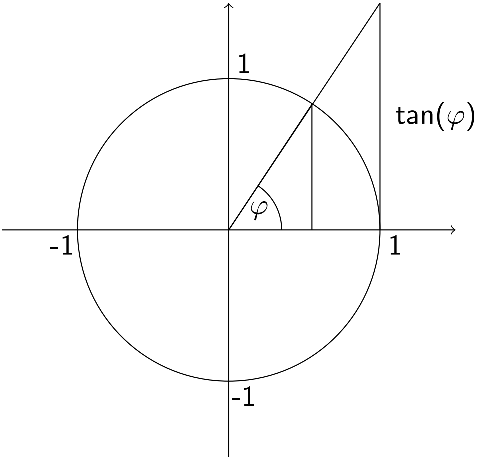
Definition

Die Funktion

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2} + k \right) \pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \ \varphi \mapsto \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

nennen wir *Tangens*.




1
tan(φ)
φ
-1
1
-1

Wichtige Werte von Cosinus, Sinus und Tangens

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$\tan(\varphi)$	φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
0	1	0	0	π	-1	0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1	/	$\frac{3}{2}\pi$	0	-1	/
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	-1	0	0	2π	1	0	0

Beispiel

1. Betrachte $z = 1 + i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es kommen also $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ in Frage (siehe Tabelle auf Folie 8). Da $\mathrm{Re}(z) = 1 > 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$ gilt, liegt z im 1. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. Damit erhalten wir
$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right).$$
2. Betrachte $z = i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ und $\cos(\varphi) = \frac{0}{1} = 0$. Es kommen also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ in Frage. Da $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$, folgt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Damit erhalten wir
$$z = i = 1e^{i\frac{1}{2}\pi} = 1\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right).$$

Beispiel

3. Betrachte $z = -2 + 2i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ und $\cos(\varphi) = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Es kommen also $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ und $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ in Frage. Da $\mathrm{Re}(z) = -2 < 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 2 > 0$, liegt z im 2. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ folgt. Damit erhalten wir

$$z = -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right).$$

Rechenregeln

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ *mit* $z = |z|\, e^{i\varphi}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ *und* $w = |w|\, e^{i\psi}$ $(\psi \in \mathbb{R})$.

1. *Es gilt*

   $$z \cdot w = |z|\,|w|\, e^{i(\varphi+\psi)} = |z|\,|w|\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)),$$

   d. h. das Multiplizieren entspricht dem Multiplizieren der Beträge und dem Addieren der Winkel.

2. *Sei* $w \neq 0$. *Es gilt*

   $$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)),$$

   d. h. das Dividieren entspricht dem Dividieren der Beträge und der Subtraktion der Winkel. Insbesondere gilt

   $$w^n = |w|^n\, e^{in\psi}$$

   für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beispiel

1. Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ und $w = -2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi}$. Also
$$z \cdot w = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}\sqrt{8}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{16}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)} = 4e^{i\pi} = -4.$$
2. Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$. Dann gilt
$$z^4 = \sqrt{2}^4 e^{i4\cdot\frac{1}{4}\pi} = 4e^{i\pi} = -4.$$
3. Betrachte $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}$ und $w = i = e^{\frac{1}{2}\pi}$. Dann gilt
$$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{2}\pi}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{1}{4}\pi+2\pi\right)}$$
$$= \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

Bemerkung

Sei $0 \neq z = |z|\, e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{z} &= |z|\, e^{-i\varphi} = |z|\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = |z|\,(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))\\ &= |z|\, e^{i(2\pi-\varphi)} = |z|\,(\cos(2\pi-\varphi) + i\sin(2\pi-\varphi)).\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $z = -2 + \sqrt{12}i$. Dann gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$ und $\cos(\varphi) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Da $\mathrm{Re}(z) = -2 < 0$ und $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{12} > 0$ gilt, liegt z im 2. Quadranten, sodass $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Also $z = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Damit folgt

$$\overline{z} = 4e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)} = 4e^{i\left(2\pi-\frac{2}{3}\pi\right)} = 4e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$