Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

24.01.2020

Wir wollen uns im Folgenden mit der Lösungstheorie quadratischer Gleichungen beschäftigen, d. h. mit Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ feste Koeffizienten mit $a \neq 0$ sind und $x \in \mathbb{R}$ die Variable ist. Wir versuchen also die Elemente der Menge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; ax^2 + bx + c = 0\}$$

explizit anzugeben.

Beispiel

Betrachte die quadratische Gleichung

$$3x^2 + x = 0.$$

Dann gilt

$$0 = 3x^2 + x = 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) = 3x\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

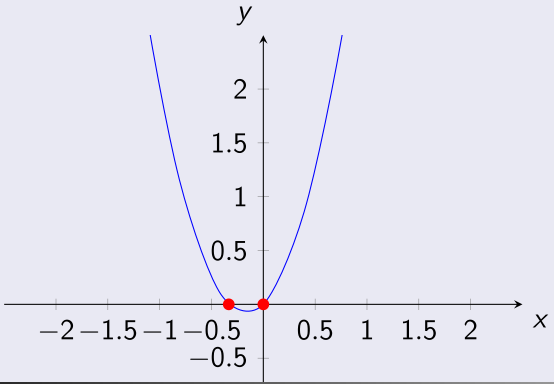
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\frac{1}{3},$$

sodass

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ 3x^2 + x = 0\right\} = \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}.$$

Beispiel

Das Lösen der quadratischen Gleichung $3x^2 + x = 0$ bedeutet nichts anderes, als dass wir die Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2 + x$ berechnen. Diese Nullstellen können wir auch graphisch ermitteln:



Erinnerung

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelten die binomischen Formeln:

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (1. Binomische Formel),
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ (2. Binomische Formel),
3. $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ (3. Binomische Formel).

Bemerkung

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ oder } x = -y. \end{aligned}$$

Frage

Gibt es ein allgemeines Verfahren um quadratische Gleichungen zu lösen?

Um die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ zu lösen, schauen wir uns die sogenannte *quadratische Ergänzung an*:

1. Da $a \neq 0$, dürfen wir als ersten Schritt beide Seiten durch a teilen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

2. Anschließend bringen wir den konstanten Term auf die andere Seite:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

3. Wir wollen nun auf der linken Seite die 1. binomische Formel erzwingen. Wir schreiben deswegen zunächst die Gleichung als

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}.$$

Uns fehlt also der Term $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ auf der linken Seite. Deshalb addieren wir auf beiden Seiten $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ und erhalten

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

4 Also gilt

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}\left(-4ac + b^2\right) = \frac{1}{4a^2}D,$$

wobei $D = b^2 - 4ac$ die sogenanne *Diskriminante* ist. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden, da die linke Seite (als Quadrat einer reellen Zahl) immer positiv ist, aber die rechte Seite negativ sein kann.

4

1. $D \geq 0$: Nach der Bemerkung auf Folie 5 folgt

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{1}{4a^2} D = \left(\frac{1}{2a}\sqrt{D}\right)^2 \\
\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= \frac{1}{2a}\sqrt{D} \quad \text{oder} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{1}{2a}\sqrt{D} \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a} \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Diese Formel wird auch *abc-Formel* genannt.

2. $D < 0$: Die quadratische Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, d. h. $\mathbb{L} = \emptyset$.

Bemerkung

1. Schritt 3 kann man sich wie folgt merken:
   1. Man schaut sich den Faktor vor x an (hier also $\frac{b}{a}$).
   2. Dieser wird halbiert ($\frac{b}{2a}$), quadriert ($\left(\frac{b}{2a}\right)^2$) und anschließend auf beiden Seiten addiert.
2. Falls $D \geq 0$, können wir durch das Kombinieren der Schritte 1 und 4.1 die Faktorisierung
$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right)$$
erreichen.
3. Gilt $a = 1, b = p, c = q$, so gilt, falls $D \geq 0$, die *pq-Formel*
$$x = -\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Verfahren

Sei

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ *feste reelle Koeffizienten mit* $a \neq 0$ *sind und* $x \in \mathbb{R}$ *die Variable ist.*

- *Berechne* $D = b^2 - 4ac$.
  1. *Falls* $D \geq 0$, *so gilt*

  $$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} \right\}$$
  $$= \left\{ -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

  2. *Falls* $D < 0$, *so gilt* $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel

Betrachte

$$4x^2 - 3x = 1.$$

Es gilt

$$4x^2 - 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 3x - 1 = 0,$$

sodass $a = 4, b = -3, c = -1$ folgt. Also

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25 \geq 0,$$

sodass

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} \right\} = \left\{ -\frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 4}, -\frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 4} \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{4}, 1 \right\}.$$

Frage

Gibt es bzw. können wir eine Zahl x konstruieren, sodass diese Zahl die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

erfüllt?

Antwort

Ja, aber diese Zahl ist keine reelle Zahl. Dies führt zu den *komplexen Zahlen*.

Wir wollen im Folgenden unseren Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen so erweitern, dass die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

eine Lösung besitzt (vgl. hierzu auch die Erweiterung der Zahlenbereiche in der 1. Vorlesung).

Bemerkung

Betrachte $\mathbb{R}^2$. Wir wissen bereits, dass

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

Frage

Gibt es eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$, sodass wir Elemente von $\mathbb{R}^2$ als Zahlen auffassen können?

Definiert

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c \\ b \cdot d \end{pmatrix}$$

für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine sinnvolle Multiplikation? Da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt, können wir nicht durch alle Elemente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ teilen. Obige Multiplikation ist also nicht zielführend.

Frage

Gibt es eine „sinnvolle“ Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$?

Definition

Definiere

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c - b \cdot d \\ a \cdot d + b \cdot c \end{pmatrix}$$

für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Wir nennen das Tripel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ die *komplexen Zahlen* und schreiben kurz $\mathbb{C}$. Weiterhin nennen wir

$$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die *imaginäre Einheit*.

Bemerkung

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Wir können die Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ „identifizieren".

   Wir schreiben deshalb auch $a + bi = a + ib$ statt
   $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Es gilt

   $$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   also $i^2 + 1 = 0$.

3. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $a + ib$ und $c + id$ ergibt sich dann durch ausmultiplizieren:

   $$(a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Rechenregeln

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- *Addition:* $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- *Subtraktion:* $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
- *Multiplikation:* $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- *Division:* $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Beispiel

1. $(4+7i)+(-3+5i)=(4-3)+i(7+5)=1+12i$
2. $(9-i)-(18+16i)=(9-18)+i(-1-16)=-9-17i$
3. $(2-15i)(3+4i)=6+8i-45i+60=66-37i$
4. $\frac{2-i}{-1+3i}=\frac{2-i}{-1+3i}\cdot\frac{-1-3i}{-1-3i}=\frac{-2-6i+i-3}{1+9}=\frac{-5-5i}{10}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Bemerkung

Wenn wir im Folgenden von einer komplexen Zahl $z = a + ib$ sprechen, nehmen wir immer implizit an, dass $a, b \in \mathbb{R}$.

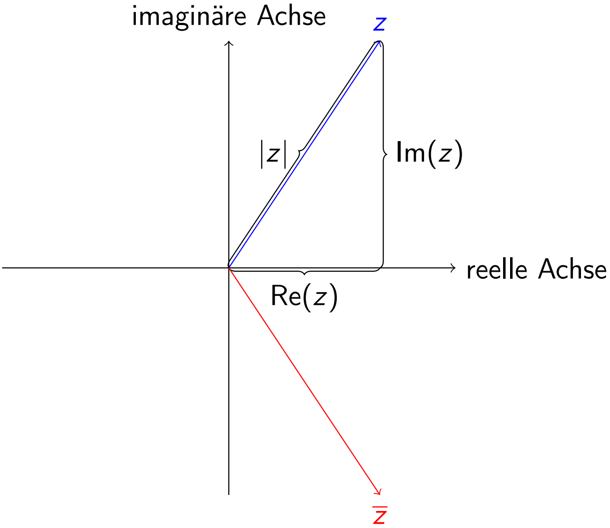
Definition

Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl.

1. Die reelle Zahl $\mathrm{Re}(z) = a$ heißt *Realteil* von z.
2. Die reelle Zahl $\mathrm{Im}(z) = b$ heißt *Imaginärteil* von z.
3. Die komplexe Zahl $\overline{z} = a - ib$ heißt das *komplex Konjugierte* von z.
4. Die reelle Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt *Betrag* von z.

Bemerkung

1. Der Realteil entspricht also der ersten Komponente.
2. Der Imaginärteil entspricht der zweiten Komponente.
3. Der Imaginärteil ist eine reelle Zahl!
4. Das komplex Konjugierte einer komplexen Zahl entspricht der komplexen Zahl, die durch Spiegelung an der x-Achse (reelle Achse) entsteht.
5. Der Betrag ist gerade die Länge des Vektors (beachte den Satz des Pythagoras).


imaginäre Achse
z
$|z|$
$\mathrm{Im}(z)$
reelle Achse
$\mathrm{Re}(z)$
$\overline{z}$

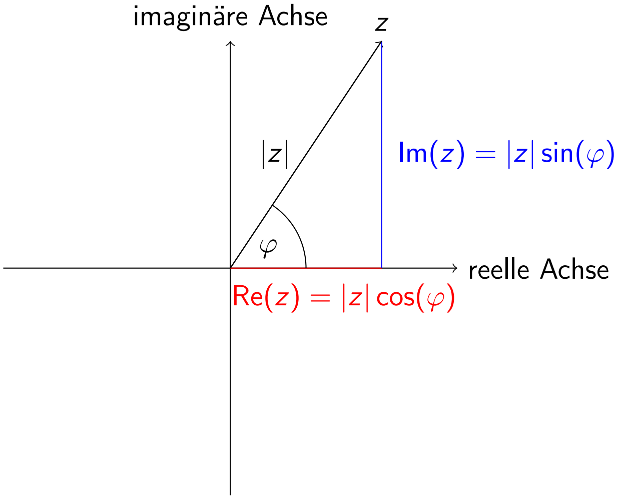
Beispiel

1. $z = 1 - 4i$. Dann $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = -4$, $\overline{z} = 1 + 4i$, $|z| = \sqrt{17}$.
2. $z = -3$. Dann $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\overline{z} = -3$, $|z| = 3$.
3. $z = i$. Dann $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 1$, $\overline{z} = -i$, $|z| = 1$.

Rechenregeln

Seien $z = a + bi$ und $w = c + di$ komplexe Zahlen. Dann gilt:

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *und* $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
2. $|z|^2 = z\overline{z}$,
3. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, *falls* $z \neq 0$,
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*,
5. $|zw| = |z|\,|w|$,
6. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$.


imaginäre Achse
z
$|z|$
$\mathrm{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$
φ
reelle Achse
$\mathrm{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$

Satz

Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl. Dann existiert ein Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass

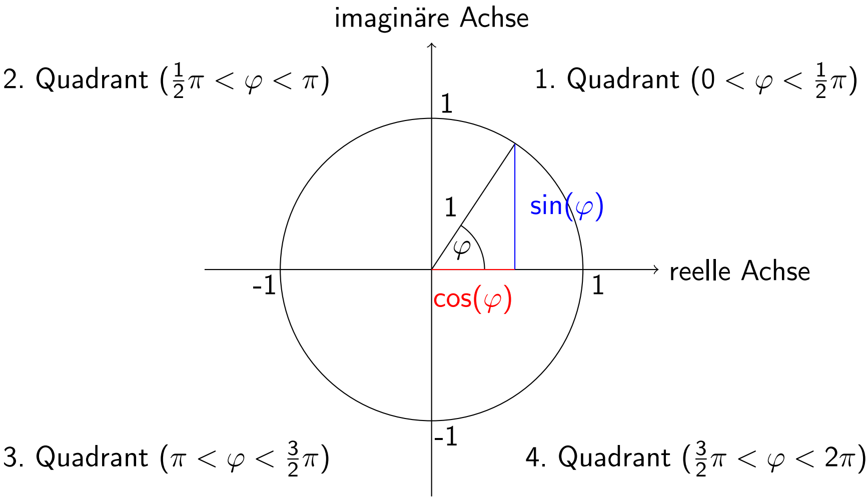
$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \\ &= |z| \cos(\varphi) + i\, |z| \sin(\varphi) \\ &= |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right). \end{aligned}$$

Wir können sogar $\varphi \in [0; 2\pi)$ erreichen, sodass φ eindeutig ist.

Bemerkung

Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ liegt genau dann im

- 1. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$,
- 2. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$,
- 3. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$,
- 4. Quadranten, wenn $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$.


imaginäre Achse
2. Quadrant ($\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$)
1. Quadrant ($0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$)
1
1
φ
sin(φ)
-1
reelle Achse
1
cos(φ)
-1
3. Quadrant ($\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$)
4. Quadrant ($\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$)

Definition (Eulersche Formel)

Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

und für alle $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

Bemerkung

- Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$e^{z+w} = e^z e^w.$$
- Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$
- Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$.

Definition

Ist $z \neq 0$, so nennen wir

$$z = |z|\, e^{i\varphi} = |z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in [0; 2\pi)$ der eindeutige Winkel von Folie 26 ist, die *Polardarstellung von z*. Der Winkel φ wird auch als *Argument von z*, in Zeichen $\arg(z) = \varphi$, bezeichnet.

Bemerkung

Ist $z \neq 0$, so lässt sich das Argument φ von z durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{oder} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

bestimmen. Hierbei muss aber zusätzlich der Quadrant beachtet werden, da z. B. $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{7}{4}\pi)$ gilt.

Wir haben bereits gesehen, dass i die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0$$

löst.

Frage

Ist jede quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ lösbar?

Diese Frage beantworten wir in der nächsten Vorlesung.