Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

31.01.2020

Frage

Ist jede quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ lösbar?

Diese Frage beantworten wir in der nächsten Vorlesung.

Sei

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$ eine quadratische Gleichung. Wir gehen wie am Anfang vor:

- Teilen durch a und quadratische Ergänzung ergibt

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
  1. $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$: Die (doppelte) Lösung ist

$$z = -\frac{b}{2a}.$$

2. $-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \neq 0$, d.h. $4ac-b^2 \neq 0$: Die Nullstellen sind

$$z = -\frac{b}{2a} \pm w,$$

wobei

$$w^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

und wir schreiben

$$w = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Hinweis: Für $-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \in \mathbb{R}$ und $-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ erhalten wir hier die *abc*-Formel (bzw. *pq*-Formel)!

Beispiele

1. Betrachte $z^2 + 2z + (3 - \sqrt{12}i) = 0$. Dann gilt $a = 1, b = 2, c = 3 - \sqrt{12}i$.
   1. Wir suchen w mit

$$w^2 = \frac{4 - 4(3 - \sqrt{12}i)}{4} = -2 + i\sqrt{12}$$

und betrachten die Gleichungen

$$\mathrm{Re}(w)^2 - \mathrm{Im}(w)^2 = -2, \quad 2\,\mathrm{Re}(w)\,\mathrm{Im}(w) = \sqrt{12}.$$

2 Wir erhalten $\mathrm{Re}(w) = \sqrt{3}/\,\mathrm{Im}(w)$ und die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{Im}(w)}\right)^2 - \mathrm{Im}(w)^2 + 2 \\
&= \frac{3}{\mathrm{Im}(w)^2} - \mathrm{Im}(w)^2 + 2 \\
\Leftrightarrow 0 &= 3 - \mathrm{Im}(w)^4 + 2\mathrm{Im}(w)^2 \\
&= \underbrace{(1 + \mathrm{Im}(w)^2)}_{\text{keine Lösung für } \mathrm{Im}(w) \in \mathbb{R}} (3 - \mathrm{Im}(w)^2).
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{3}$ und $\mathrm{Re}(w) = 1$, sodass $w = 1 + \sqrt{3}i$ und die Nullstellen sind

$$z = -\frac{b}{2a} \pm w = -1 \pm (1 + \sqrt{3}i), \quad z_1 = \sqrt{3}i, z_2 = -2 + \sqrt{3}i.$$

Mit $\mathrm{Im}(w) = -\sqrt{3}$ und $\mathrm{Re}(w) = -1$ ist $w = -(1+\sqrt{3}i)$ und die Nullstellen sind

$$z = -\frac{b}{2a} \pm w = -1 \mp (1+\sqrt{3}i), \quad z_2 = \sqrt{3}i, z_1 = -2+\sqrt{3}i.$$

Die Nullstellen sind gleich, da $w^2 = (-w)^2$ gilt.

2. Betrachte $z^2 + 2z + 5 = 0$. Dann gilt $a = 1, b = 2, c = 5$.
   1. Wir suchen w mit

$$w^2 = \frac{4 - 4.5}{4} = -4$$

und betrachten die Gleichungen

$$\mathrm{Re}(w)^2 - \mathrm{Im}(w)^2 = -4, \quad 2\,\mathrm{Re}(w)\,\mathrm{Im}(w) = 0.$$

2. Wir erhalten $\mathrm{Re}(w) = 0$ und $\mathrm{Im}(w) = 2$, sodass $w = 2i$ und die Nullstellen sind
$$z = -\frac{b}{2a} \pm w = -1 \pm 2i, \quad z_1 = -1 + 2i, z_2 = -1 - 2i.$$
3. Mit $\mathrm{Im}(w) = 0$ erhalten wir die Gleichung $\mathrm{Re}(w)^2 = -4$ und diese hat keine reelle Lösung für $\mathrm{Re}(w)$.

1. Betrachte $z^2 - i = 0$. Dann gilt $a = 1, b = 0, c = i$.
   1. Wir suchen w mit
   $$w^2 = \frac{4i}{4} = i$$
   und betrachten die Gleichungen
   $$\operatorname{Re}(w)^2 - \operatorname{Im}(w)^2 = 0, \quad 2\operatorname{Re}(w)\operatorname{Im}(w) = 1.$$
   Mit dem Ansatz $\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(w)$ erhalten wir w und $z = \pm(1+i)/\sqrt{2}$.

2 Schreibe die Zahlen z und i nach der Eulerschen Formel als $z = re^{i\varphi}$ $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$ und $i = 1.e^{i\frac{\pi}{2}+2n\pi i}, n \in \mathbb{N}_0$. Damit erhalten wir die Gleichungen $r^2 = 1$ und wir suchen $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ mit $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}_0$ sodass

$$z_1 = 1.e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = (1+i)/\sqrt{2},$$
$$z_2 = 1.e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -(1+i)/\sqrt{2}$$

die Gleichung löst.

Es gibt folgende Methode zur Berechnung der Nullstellen.

2. $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \neq 0$: Schreibe diesen Term in Polardarstellung, d. h.

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = re^{i\varphi}.$$

Dann sind

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a},$$
$$z_2 = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} - \frac{b}{2a} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \frac{b}{2a}$$

die Lösungen der Gleichung.

Beispiel

1. Betrachte $z^2 + 2z + (3 - \sqrt{12}i) = 0$. Dann gilt $a = 1, b = 2, c = 3 - \sqrt{12}i$.
   1. $\left(z + \frac{2}{2\cdot 1}\right)^2 = (z+1)^2 = -\frac{3-\sqrt{12}i}{1} + \left(\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2 = -2 + \sqrt{12}i = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} \neq 0.$
   2. Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2e^{i\frac{2}{6}\pi} - 1 = 2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) - 1 \\
&= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = \sqrt{3}i, \\
z_2 &= -2e^{i\frac{2}{6}\pi} - 1 = -2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) - 1 \\
&= -2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -2 - \sqrt{3}i.
\end{aligned}
$$

Beispiel

2. Betrachte $z^2 + 2z + 5 = 0$. Dann gilt $a = 1, b = 2, c = 5$.
   1. $\left(z + \frac{2}{2\cdot 1}\right)^2 = (z+1)^2 = -\frac{5}{1} + \left(\frac{2}{2\cdot 1}\right)^2 = -4 = 4e^{i\pi} \neq 0.$
   2. Die Lösungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{1}{2}\pi} - 1 = 2\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) - 1 \\ &= 2\,(0 + i) - 1 = -1 + 2i, \\ z_2 &= -2e^{i\frac{1}{2}\pi} - 1 = -2\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) - 1 \\ &= -2\,(0 + i) - 1 = -1 - 2i. \end{aligned}$$

Bemerkung

Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0,$$

dann ist auch $\overline{z}$ eine Lösung.

Beispiel

$z = -1 + 2i$ ist eine Lösung von

$$z^2 + 2z + 5 = 0.$$

Damit ist $\overline{z} = -1 - 2i$ ebenfalls eine Lösung.

Bemerkung

Abschließend erwähnen wir das folgende Ergebnis. Nach diesem Satz gibt es zu jeder Gleichung, die “nichtkonstant” von einer variable abhängt, eine Lösung.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, sodass für mindestens ein $a_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ gilt. Dann besitzt das (nichtkonstante) Polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

eine Nullstelle.