Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

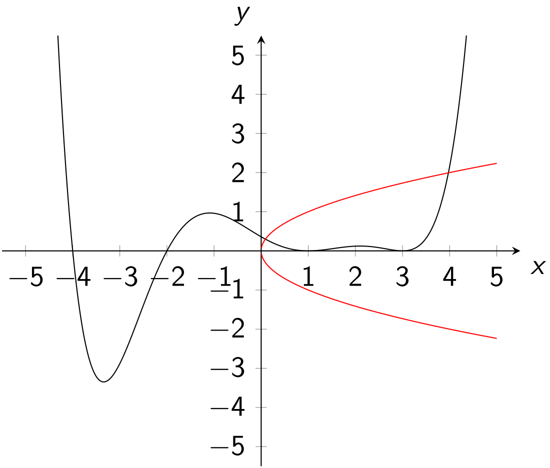
Universität des Saarlandes

25.10.2019

Beispiele für Anwendungen mit Funktionen in der Biologie

- Auswertungen von Messdaten (Statistik, alle Naturwissenschaften)
- Modellierung von Prozessen in der Natur:
  - Populationsdynamik (Differentialgleichungen, Biologie)
  - Zellverhalten (Stochastik, Biologie)
  - Schwingungen (Differentialgleichungen, Physik)
  - ...

Funktionen I



- Graph zur schwarzen Kurve $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; zulässig als Graph einer Funktion
- Graph zur roten Kurve $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; unzulässig als Graph einer Funktion (Nicht jedem x-Wert wird ein y-Wert zugeordnet und manchen x-Werten werden mehrere y-Werte zugeordnet.)

Funktionen II

Definition

Seien D und Z Mengen. Wir nennen ein Tripel $f = (G_f, D, Z)$ *Funktion*, falls

1. $G_f \subset D \times Z$ (*Graph der Funktion* f) und
2. für alle $x \in D$ existiert genau ein $y \in Z$, sodass $(x, y) \in G_f$.

In diesem Fall schreiben wir auch $y = f(x)$ für $x \in D$ und

$$f\colon D \to Z,\ x \mapsto f(x).$$

Die Mengen D und Z heißen *Definitionsmenge/Definitonsbereich* und *Zielbereich*.

Funktionen III

Bemerkung

- Der Definitions- und Zielbereich sind also Teil der Definition einer Funktion, d.h., wenn man eine dieser Mengen abändert, erhält man eine andere Funktion.
  Beispiele:
  - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ sind unterschiedliche Funktionen.
  - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g: \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2$ sind unterschiedliche Funktionen, obwohl der Graph gleich aussieht.
  - $f(x) = x^2$ ist keine Funktion.
- Nach Punkt (2) kann jedem Element im Definitionsbereich also nur ein Element im Zielbereich zugeordnet werden.

Stauchung, Streckung und Spiegelung I

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Definition

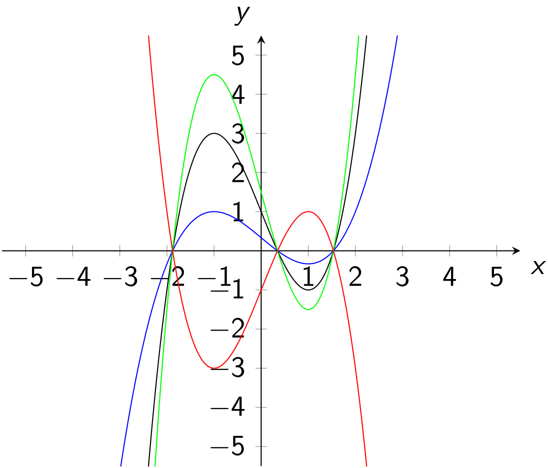
Wir definieren

$$\alpha f \colon D \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \alpha f(x).$$

Bemerkung

- $0 < \alpha < 1$: αf entsteht durch eine Stauchung von f.
- $\alpha > 1$: αf entsteht durch eine Streckung von f.
- $\alpha = -1$: αf entsteht durch eine Spiegelung von f an der x-Achse.

Stauchung, Streckung und Spiegelung II



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{3}(x^3 - 3x + 1)$
- $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3}{2}(x^3 - 3x + 1)$
- $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -(x^3 - 3x + 1)$

Summe I

Bemerkung

Wir können eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der konstanten Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a$ identifizieren.

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Definition

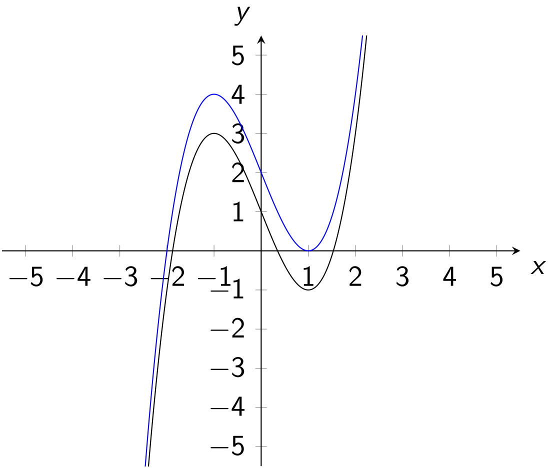
Wir definieren

$$f + g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x).$$

Bemerkung

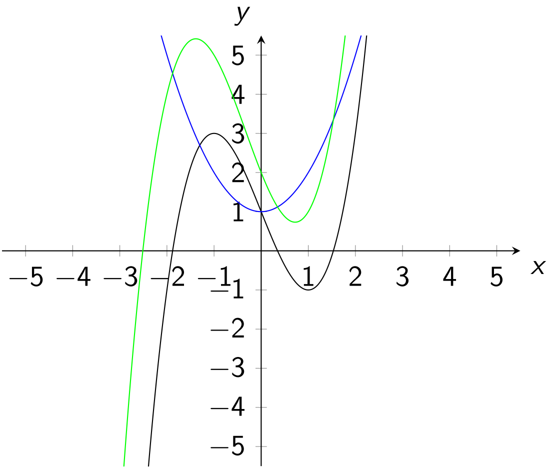
Wir können damit auch $f - g = f + (-g)$ definieren.

Summe II



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 2$

Summe III



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + x^2 - 3x + 2$

Produkt und Quotient

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Definition

Wir definieren

- $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ und,
- falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Zusammenfassung

Seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Definition

Wir definieren:

- $\alpha f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha f(x)$.
- $f + g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$.
- $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$.
- Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, $\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Bild I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Definition

Sei $A \subset D$. Wir nennen die Menge

$$f(A) = \{f(a) \ : \ a \in A\} \subset Z$$

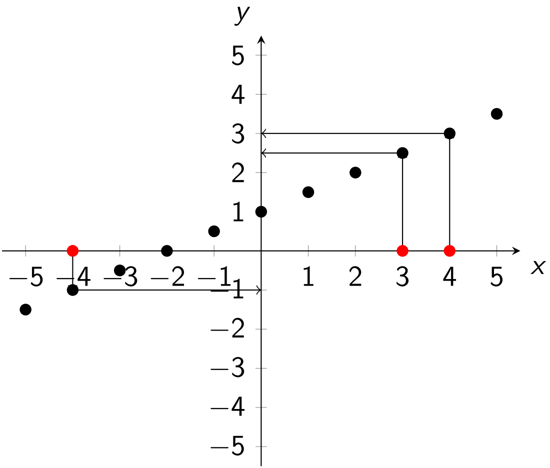
das *Bild von A unter der Funktion f*. Weiterhin nennen wir $f(D)$ das *Bild von f*.

Bemerkung

Für $A_1, A_2 \subset D$ gilt

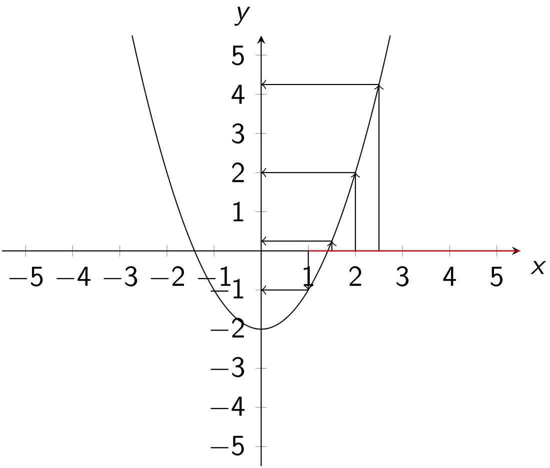
- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Bild II



- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x + 1,$
  $A = \{-4, 3, 4\}$:
  $f(A) = \left\{-1, \frac{5}{2}, 3\right\}$

Bild III



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2,$
  $A = [1, \infty)$: $f(A) = [-1, \infty)$

Urbild I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Definition

Sei $B \subset Z$. Wir nennen die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \ : \ f(x) \in B\} \subset D$$

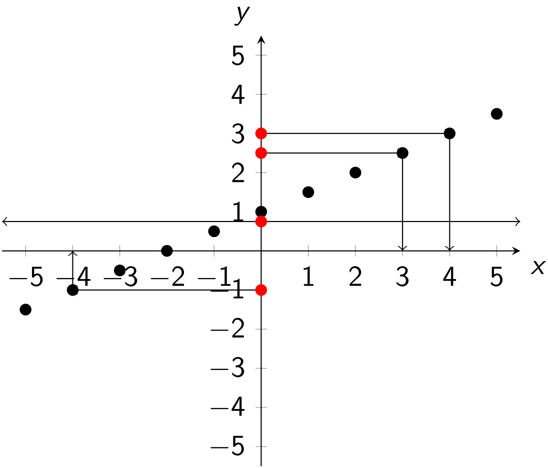
das *Urbild von B unter der Funktion f*.

Bemerkung

Für $B_1, B_2 \subset Z$ gilt

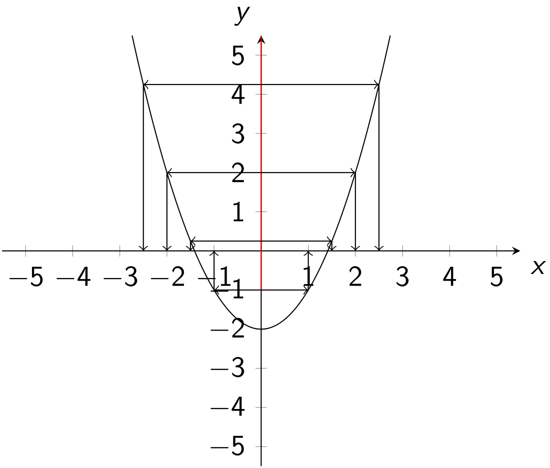
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Urbild II



- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$, $B = \left\{-1, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, 3\right\}$: $f^{-1}(B) = \{-4, 3, 4\}$

Urbild III



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2,$
  $B = [-1, \infty)$:
  $f^{-1}(B) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Injektivität I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

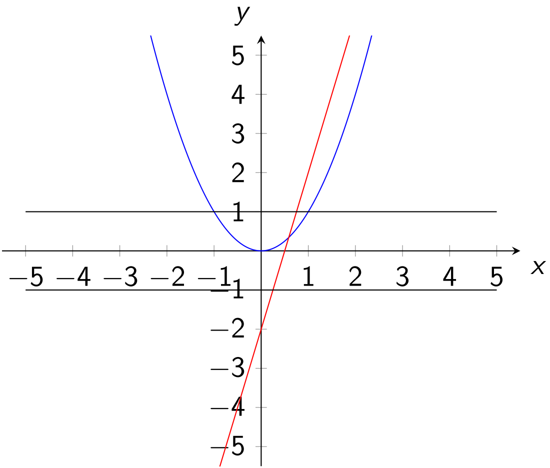
Definition

Wir nennen f *injektiv*, falls jedes Element im Bild von f von genau einem Element aus der Definitionsmenge angenommen wird.

Bemerkung

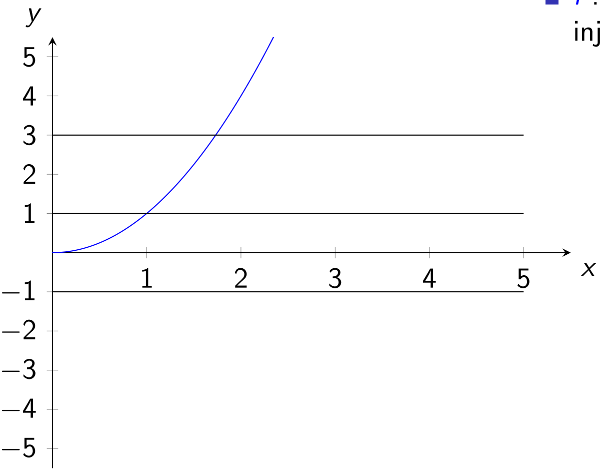
Falls $D \subset \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R}$, so bedeutet die Injektivität der Funktion f, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen in maximal einem Punkt trifft.

Injektivität II



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(1) = 1 = f(-1)$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 4x - 2$ ist injektiv.

Injektivität III



- $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist injektiv.

Surjektivität I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

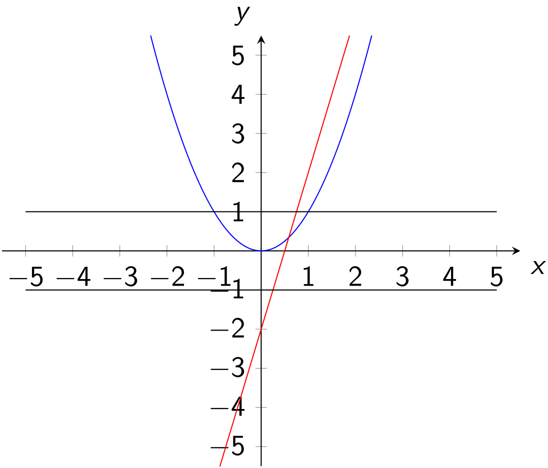
Definition

Wir nennen f *surjektiv*, falls jedes Element im Zielbereich im Bild von f ist, d.h. falls $f(D) = Z$ gilt.

Bemerkung

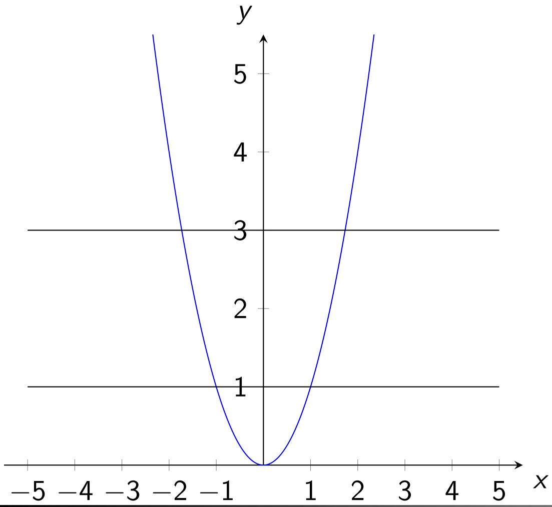
Falls $D \subset \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R}$, so bedeutet die Surjektivität der Funktion f, dass jede Parallele zur x-Achse mit einem Abstand $z \in Z$ den Graphen in mindestens einem Punkt trifft.

Surjektivität II



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv, da kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$ existiert.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 2$ ist surjektiv.

Surjektivität III



- $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \; x \mapsto x^2$ ist surjektiv.

Bijektivität I

Seien D, Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

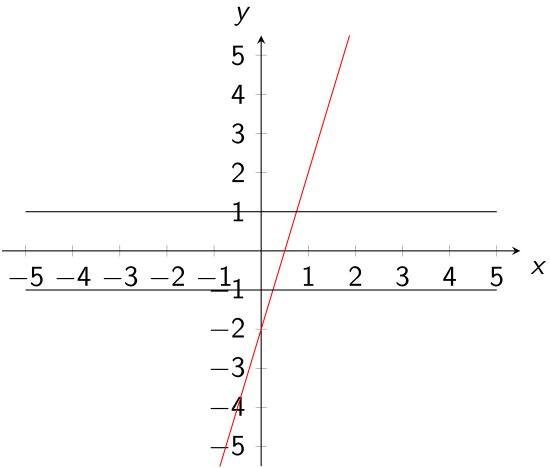
Definition

Wir nennen f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung

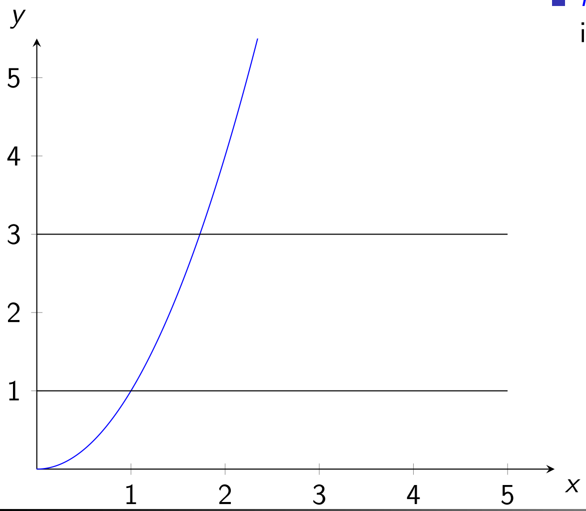
Falls $D \subset \mathbb{R}$ und $Z \subset \mathbb{R}$, so bedeutet die Bijektivität der Funktion f, dass jede Parallele der x-Achse mit einem Abstand $z \in Z$ den Graphen in genau einem Punkt trifft.

Bijektivität II



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 2$ ist bijektiv.

Bijektivität III



- $f : [0, \infty) \to [0, \infty), \; x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

Bijektivität IV

Seien D und Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Bemerkung

Falls f injektiv ist, so ist die Funktion $\tilde{f}\colon D \to f(D),\ x \mapsto f(x)$ bijektiv.

Beispiel

Seien $D = [0,\infty)$ und $Z = \mathbb{R}$ sowie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Dann ist f injektiv und $f([0,\infty)) = [0,\infty)$, sodass

$$\tilde{f}\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2$$

bijektiv ist.