Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

08.11.2019

Verkettung I

Seien D_1, D_2 und Z_1, Z_2 Mengen sowie $f: D_1 \to Z_1$ und $g: D_2 \to Z_2$ zwei Funktionen.

Definition

Falls $f(D_1) \subseteq D_2$ gilt, so definieren wir

$$g \circ f : D_1 \to Z_2, \ x \mapsto g(f(x))$$

und nennen $g \circ f$ *die Verkettung von g und f*.

Bemerkung

Es gilt nicht

$$g \circ f = f \circ g,$$

da die rechte Seite nicht einmal definiert sein muss. Damit ist die Verkettung eine nichtkommutative, assoziative Verknüpfung.

Verkettung II

Beispiel

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g\colon (-\infty; 0) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 1$. Dann ist $g \circ f$ nicht definiert, da $f(\mathbb{R}) = [0; \infty) \not\subseteq (-\infty; 0)$.
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$. Dann gilt

  $$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2,$$

  aber

  $$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(g(x)) = f(2x) = (2x) + 1 = 2x + 1.$$

  Damit sind $g \circ f$ und $f \circ g$ unterschiedlich.

Transformation in x-Richtung I

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f\colon D_2 \to Z$ eine Funktion sowie $a \in \mathbb{R}$.

Satz (Verschiebung)

Seien

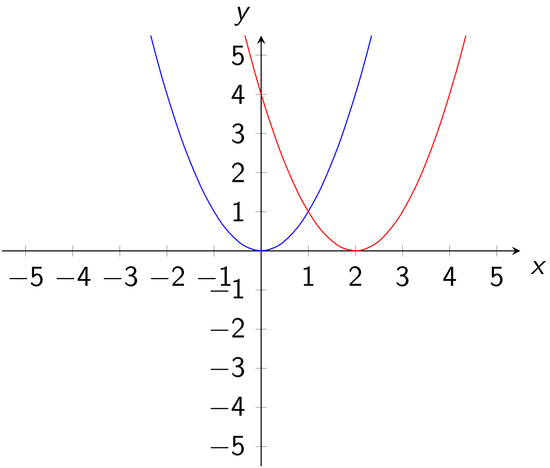
$$\tau_{-a}\colon D_1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - a$$

und es gelte $\tau_{-a}(D_1) \subseteq D_2$. Dann beschreibt die Funktion

$$f \circ \tau_{-a}\colon D_1 \to Z,\ x \mapsto f(x - a)$$

eine Verschiebung um a von f in x-Richtung.

Transformation in x-Richtung II



- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
- $g \circ \tau_{-2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-2)^2$

Transformation in x-Richtung III

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f\colon D_2 \to Z$ eine Funktion sowie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Satz (Stauchung, Streckung und Spiegelung)

Seien

$$\sigma_\alpha\colon D_1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha x$$

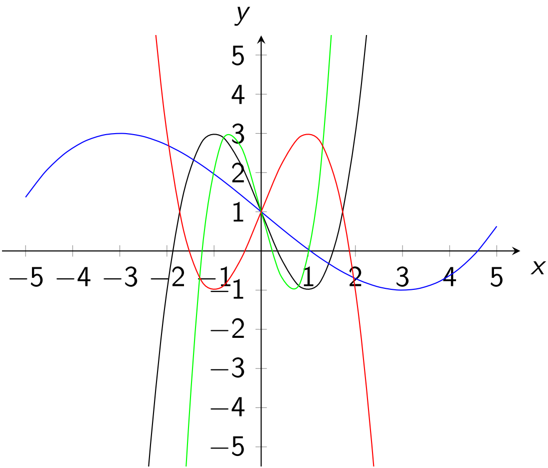
und es gelte $\sigma_\alpha(D_1) \subseteq D_2$. Dann beschreibt die Funktion

$$f \circ \sigma_\alpha\colon D_1 \to Z,\ x \mapsto g(\alpha x)$$

eine

- *Stauchung um α von f in x-Richtung, falls $\alpha > 1$,*
- *Streckung um α von f in x-Richtung, falls $0 < \alpha < 1$,*
- *Spiegelung von f an der y-Achse, falls $\alpha = -1$.*

Transformation in x-Richtung IV



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 3x + 1$
- $f \circ \sigma_{1/3} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + 1 = \frac{1}{27}x^3 - x + 1$
- $f \circ \sigma_{3/2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(\frac{3}{2}x\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}x\right) + 1 = \frac{27}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 1$
- $f \circ \sigma_{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (-x)^3 - 3(-x) + 1 = -x^3 + 3x + 1$

Umkehrfunktion I

Seien D und Z Mengen und $f : D \to Z$ eine bijektive Funktion.

Satz

Es existiert genau eine Funktion $g : Z \to D$, sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$$

für alle $x \in Z$ und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

für alle $x \in D$ gilt. In diesem Fall schreiben wir f^{-1} statt g und nennen $f^{-1} : Z \to D$ die Umkehrfunktion von f.

Achtung: Das Urbild existiert immer, eine Umkehrfunktion nicht.

Umkehrfunktion II

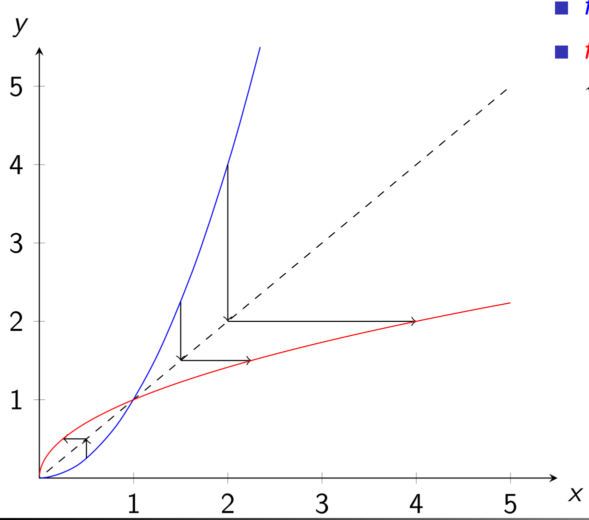
Bemerkung

Seien D und Z Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion. Dann ist f genau dann injektiv, wenn für jedes $y \in Z$ die Menge $f^{-1}(\{y\})$ (Urbild!) höchstens einelementig ist.

Bemerkung

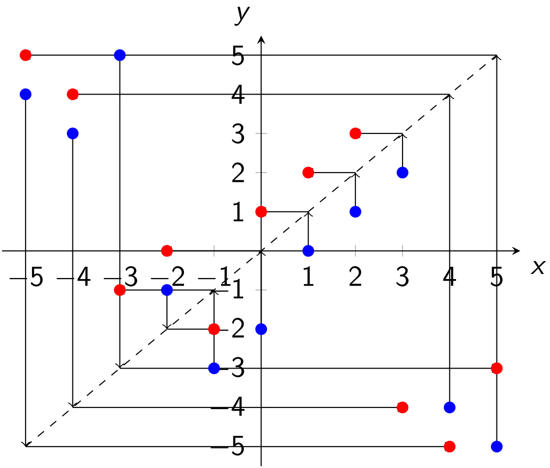
Falls $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ gilt, so kann f^{-1} graphisch durch eine Spiegelung von f an der 1. Winkelhalbierenden $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ gewonnen werden.

Umkehrfunktion III



- $f : [0;\infty) \to [0;\infty), \; x \mapsto x^2$
- $f^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty), \; x \mapsto \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

Umkehrfunktion IV



- $f : \{-5, \ldots, 5\} \to \{-5, \ldots, 5\}$
- $f^{-1} : \{-5, \ldots, 5\} \to \{-5, \ldots, 5\}$

Monotonie I

Seien $D, Z \subseteq \mathbb{R}$ Mengen und $f\colon D \to Z$ eine Funktion.

Definition

Wir nennen f

- *monoton wachsend*, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt,
- *streng monoton wachsend*, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt,
- *monoton fallend*, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt,
- *streng monoton fallend*, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt.

Monotonie II

Bemerkung

Ist f streng monoton fallend oder streng monoton steigend, so ist f auch injektiv.

Beispiel

- $f\colon [0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist streng monoton steigend, da
$$f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) > 0$$
für alle $x, y \in [0;\infty)$ mit $x < y$.
- $f\colon (-\infty; 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist streng monoton fallend.
- Allgemeiner: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f\colon [0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ ist streng monoton steigend.

Induktion I

Wie zeigen wir, dass eine <u>Aussage</u> für unendlich viele Zahlen gilt?

Es reicht nicht aus einzelne Fälle *auszuprobieren*.

Methode

Wir zeigen, dass eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt mit dem Prüfen folgender Schritte.

(i) Die Aussage gilt für einen Startwert n_0.

Damit gibt es mindestens einen Wert, für den die Aussage gilt.

(ii) Wir nehmen an, dass die Aussage für eine bestimmte Zahl n gilt, und zeigen so, dass sie auch für ihren Nachfolger $n+1$ gilt.

Induktion II

Dies ist das Prinzip der vollständigen (mathematischen) Induktion und lautet rigoroser formuliert wie folgt.

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $\mathcal{P}(n), n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform mit den Eigenschaften:

(i) Die Aussage $\mathcal{P}(1)$ ist wahr.

(ii) Ist $\mathcal{P}(k)$ wahr, so ist auch $\mathcal{P}(k+1)$ wahr für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\mathcal{P}(n)$ wahr für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Induktion III

Beispiele

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion:

1. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1);$$
2. $$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n};$$
3. $n^2 + 3n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar.

Lösung

1. $\mathcal{P}(n)$ sei die Aussageform

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Induktionsanfang (Beweis von $\mathcal{P}(1)$)
Es ist

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1, \qquad \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1,$$

so dass $\mathcal{P}(1)$ richtig ist.

Induktionsschluss

Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$\mathcal{P}(k): \quad \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \tag{1}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$\mathcal{P}(k+1): \quad \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

impliziert.

Aus (1) ergibt sich durch Addition der Zahl $(k+1)^2$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2}_{=\sum_{i=1}^{k+1} i^2} = \underbrace{\tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1). \end{aligned}$$

Damit haben wir $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ bewiesen.

2 $\mathcal{P}(n)$ sei die Aussageform

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Induktionsanfang (Beweis von $\mathcal{P}(2)$)
Es ist

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\qquad \frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4},$$

so dass $\mathcal{P}(2)$ richtig ist.

Induktionsschluss

Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$\mathcal{P}(k): \quad \prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{k+1}{2k} \tag{2}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$\mathcal{P}(k+1): \quad \prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

impliziert.

Aus (2) ergibt sich durch Multiplikation mit $\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$:

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)}_{=\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\frac{k+1}{2k}}_{}$$

$$= \frac{k+1}{2k} - \frac{1}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{k(k+2)}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)+1}{2(k+1)}.$$

Damit haben wir $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ bewiesen.

3 $\mathcal{P}(n)$ sei die Aussageform

$$n^2 + 3n \text{ ist durch 2 teilbar.}$$

Induktionsanfang (Beweis von $\mathcal{P}(1)$)
Es ist

$$1^2 + 3 \cdot 1 = 4$$

und $4 = 2 \cdot 2$, sodass $\mathcal{P}(1)$ richtig ist.

Induktionsschluss

Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$\mathcal{P}(k): \quad k^2 + 3k \text{ ist durch 2 teilbar}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$\mathcal{P}(k+1): (k+1)^2 + 3(k+1) \text{ ist durch 2 teilbar}$$

impliziert.

Es ist

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + 3(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 3k + 3 \\ &= \underbrace{k^2 + 3k}_{\text{teilbar durch 2}} + \underbrace{2(k+2)}_{\text{teilbar durch 2}}\end{aligned}$$

und somit ist $(k+1)^2 + 3(k+1)$ durch 2 teilbar.

Damit haben wir $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ bewiesen.

Induktion IV

Es gibt Induktionen für die es notwendig ist, in der Voraussetzung Bezug auf mehrere Vorgänger zu nehmen.

Beispiele

Die zu prüfende Aussage enthält eine Rekursionsformel mit mehreren Vorgängern.

- Fibonacci-Folge, Hasenpopulation, ...

Hier benötigen wir das Prinzip der starken Induktion.

Satz (das Prinzip der starken Induktion)

Sei $\mathcal{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform mit der folgende Eigenschaft:

- Ist $\mathcal{P}(j)$ für alle $j < k$ wahr, so ist $\mathcal{P}(k)$ wahr.

Dann ist $\mathcal{P}(i)$ wahr für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Beispiel

Die durch das Rekursionsschema

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \; n = 3, 4, \ldots$$

definierte Folge $\{f_n\}$ heißt *Fibonacci-Folge*. Zeigen Sie, dass

$$f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Lösung

Es sei $\mathcal{P}(n)$ die Aussageform

$$f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(k-1) \Rightarrow \mathcal{P}(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Aussagen $\mathcal{P}(1)$ und $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ werden gesondert verifiziert. Dies ist der **Induktionsanfang**. Es gilt

$$1 = f_1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{1-3} = \frac{4}{9}, \qquad 1 = f_2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-3} = \frac{2}{3}.$$

(Da $\mathcal{P}(1)$ wahr ist, ist $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ äquivalent zu $\mathcal{P}(2)$.)

Nun sei $k \geq 3$. Im **Induktionsschluss** beweisen wir, dass die Induktionsvoraussetzung

$$\mathcal{P}(j): \quad f_j \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{j-3}, \qquad j = 1, \ldots, k-1 \tag{1}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$\mathcal{P}(k): \quad f_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}$$

impliziert.

Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
f_k &= f_{k-1} + f_{k-2} \\
&\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-4} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-5} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-5} \left(\frac{3}{2} + 1\right) && \text{(wegen (1))} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-5} \left(\frac{5}{2}\right) \\
&\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-5} \left(\frac{9}{4}\right) && \text{(denn } \tfrac{5}{2} > \tfrac{9}{4}\text{)} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}.
\end{aligned}
$$