Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

22.11.2019

Bemerkung

Bei linearen Gleichungssystemen in Zeilenstufenform kann sehr leicht ermittelt werden, ob eine Lösung existiert und diese auch bestimmt werden. Gegebenfalls müssen dazu eine oder mehrere Variablen „frei gewählt“ werden.

Beispiel

1. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(vgl. Folie 15, Vorlesung 4).

Beispiel

2. Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
entspricht ebenfalls dem LGS aus (1) (mit gleicher Lösungsmenge), da die zusätzliche Zeile „0=0“ keine Bedeutung hat.

3. Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
ist nicht lösbar ($\mathbb{L} = \emptyset$), da die letzte Zeile „0=1“ bedeutet.

Beispiel

4. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

entspricht

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 40x_5 &= -10 \end{aligned}$$

und hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \; ; \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Frage

Kann man jedes LGS (ohne Änderung der Lösungsmenge!) auf Zeilenstufenform bringen?

Definition

Sei ein LGS $(A|b)$ gegeben. Unter elementaren Zeilenumformungen verstehen wir folgende Operationen:

1. Vertauschen zweier Zeilen.
2. Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0.
3. Addieren einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

Bemerkung

Man kann zeigen, dass sich durch elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge eines LGS nicht ändert.

Satz (Gauß-Algorithmus)

Jedes LGS lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.

Bemerkung

Dies ist zunächst nur eine Existenzaussage („es funktioniert“). Man kann aber explizit einen Algorithmus angeben, den wir uns im Folgenden an Beispielen klarmachen wollen.

Beispiel

Wir betrachten das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,3 & 0 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{array}\right).$$

- Zunächst multiplizieren wir jede Zeile mit 10 (damit wir mit ganzen Zahlen rechnen können) und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir multiplizieren die erste Zeile mit 2 $((I) \to 2(I))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

- Für die anderen Zeilen führen wir ähnliche Operationen durch $((II) \to -6(II)$, $(III) \to -3(III)$ und $(IV) \to -3(IV))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -12 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir addieren zur zweiten Zeile die erste Zeile $((II) \to (II) + (I))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ -6 & -12 & -6 & -6 \end{array}\right).$$

- Zu den anderen Zeilen addieren wir ebenfalls die erste Zeile $((III) \to (III) + (I)$ und $(IV) \to (IV) + (I))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & -12 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -1 $((III) \to (-1) \cdot (III))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -12 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

- Wir multiplizieren die vierte Zeile mit $-\frac{1}{2}$ $((IV) \to (-\frac{1}{2}) \cdot (IV))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir addieren zur dritten Zeile die zweite Zeile $((III) \to (III) + (II))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

- Wir addieren zur vierten Zeile die zweite Zeile $((IV) \to (IV) + (II))$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Beispiel

- Wir tauschen die dritte und vierte Zeile ($(III) \leftrightarrow (IV)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Aus $-2x_3 = 1$ erhält man $x_3 = -\frac{1}{2}$ und damit aus $2 = -6x_2 - 4x_3 = -6x_2 + 2$, dass $x_2 = 0$ gilt. Schließlich folgt aus $8 = 6x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6x_1 + 0 - 1$, dass $x_1 = \frac{3}{2}$ gilt. Dies liefert die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

Wir können auch abkürzend einige elementare Zeilenumformungen zusammenfassen.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \to 2III + I} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV \to IV - II]{III \to III - 6II} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV \to 10IV - 3III} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (LGS mit Parametern)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und betrachte das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Dieses LGS lässt sich wie folgt auf ZSF bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 2III - aI]{II \to II + I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 4 & a & -2-a \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to 4III - aII} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & 2a+a^2 \end{array}\right)$$

Beispiel

Die 3. Zeile bedeutet

$$(4-a^2)x_3 = 2a + a^2 = a(2+a).$$

Wir müssen nun eine Fallunterscheidung machen, da

$$4 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ oder } a = -2$$

sein kann.

- $a = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$
  Also gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel

- $a = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
  Wir können also $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Dann gilt
  $0 = 4x_2 - 2x_3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$ und
  $1 = 2x_1 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(1 + x_3)$, sodass

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+x_3) \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ; \; x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_3 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Beispiel

- $a \neq 2$ und $a \neq -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & 2a+a^2 \end{array}\right)$

  Die dritte Zeile ergibt

$$\begin{aligned} &(2-a)(2+a)x_3 = (4-a^2)x_3 = 2a + a^2 = a(2+a) \\ \Leftrightarrow &(2-a)x_3 = a \\ \Leftrightarrow &x_3 = \frac{a}{2-a}. \end{aligned}$$

  Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &-2-a = 4x_2 + ax_3 = 4x_2 + \frac{a^2}{2-a} \\ \Leftrightarrow &x_2 = \frac{1}{4}\left(-2-a-\frac{a^2}{2-a}\right) = -\frac{1}{2-a}. \end{aligned}$$

Beispiel

- Schließlich folgt

$$\begin{aligned} 1 &= 2x_1 - x_3 = 2x_1 - \frac{a}{2-a} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{2-a}\right) = \frac{1}{2-a}, \end{aligned}$$

sodass

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2-a} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right\}.$$

Definition

Sei $(A|b)$ ein LGS wie auf Folie 5, Vorlesung 4.

1. Das LGS heißt *unterbestimmt*, falls $m < n$, d.h. weniger Gleichungen als Variablen zur Verfügung stehen.
2. Das LGS heißt *überbestimmt*, falls $m > n$, d.h. mehr Gleichungen als Varibalen zur Verfügung stehen.

Bemerkung

1. Ein unterbestimmtes LGS hat entweder keine Lösung oder man kann mindestens eine Variable frei wählen, d.h. das LGS hat unendlich viele Lösungen.
2. Ein homogenes LGS ist *immer* lösbar, denn $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ist immer eine Lösung. Die Lösungmenge kann aber auch unendlich viele Elemente enthalten.

Ziel

Wie groß ist die Lösungsmenge homogener LGS?

Wir haben bereits gesehen, dass die Lösungen eines LGS $(A|b)$ maßgeblich von der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ abhängt. Im Folgenden werden wir daher Matrizen als eigenständige mathematische Objekte ansehen und für diese Rechenregeln aufstellen. Besonders wichtig wird dabei das Invertieren einer Matrix sein.

Definition

Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definieren wir die Abbildung

$$
\begin{aligned}
&f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\\
&x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\cdot x = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots a_{m,n}x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung

Mit dieser Notation entspricht $(A|b)$ der Gleichung $A\cdot x = b$.

Mit der Notation

$$\mathbb{R}^{m\times n} \ni A = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n} = (a_{i,j})_{i,j}$$

ist die letzte Definition Ausgangspunkt der folgenden Definition.

Definition

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren

- *Skalares Vielfaches*: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{i,j})_{i,j} = (\alpha \cdot a_{i,j})_{i,j}$, sodass $\alpha \cdot f_A = f_{\alpha \cdot A}$
- *Summe*: $A + B = (a_{i,j})_{i,j} + (b_{i,j})_{i,j} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}$, sodass $f_A + f_B = f_{A+B}$.

Frage

Gibt es auch eine Multiplikation von Matrizen?

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

und die dazugehörigen Abbildungen

$$f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix},$$

$$f_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Definitionsbereiche (und Zielbereiche) von f_A und f_B verschieden sind, können wir $f_A \cdot f_B$ keinen Sinn verleihen.

Da jedoch das Bild von f_B in der Definitionsmenge von f_A liegt, können wir $f_A \circ f_B$ bilden. Für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\begin{aligned}
(f_A \circ f_B)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= f_A\left(f_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= f_A\left(\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(1x_1 + 2x_2) + 5(3x_1 + 4x_2) + 3(5x_1 + 6x_2) \\ 3(1x_1 + 2x_2) + 2(3x_1 + 4x_2) + 4(5x_1 + 6x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5)x_1 + (2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 6)x_2 \\ (3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5)x_1 + (3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6)x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Setzen wir also

$$C = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5\cdot 3 + 3\cdot 5 & 2\cdot 2 + 5\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5 & 3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 42 \\ 29 & 38 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$f_A \circ f_B = f_C .$$

Definition

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Wir definieren

$$A \cdot B = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,n} \cdot (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,l} = (c_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,l} = C \in \mathbb{R}^{m\times l}$$

mit

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, l$. Wir nennen C das *Matrixprodukt* von A und B und schreiben auch

$$C = A \cdot B.$$

Merkregel: $c_{i,j}$ entspricht „i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B".

Bemerkung

Das Matrixprodukt $A \cdot B$ ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt!

Beispiel

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$
  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix}$
- Hingegen ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

Bemerkung

Die Funktion f_A ist eine *lineare Abbildung*, d.h. es gelten

1. $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$ und
2. $f_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha f_A(x)$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
In der linearen Algebra zeigt man, dass zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Matrix A existiert, sodass

$$f(x) = f_A(x) = A \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Mit dieser Bemerkung können wir einige geometrische Phänomene im $\mathbb{R}^n$ durch Matrizen beschreiben.

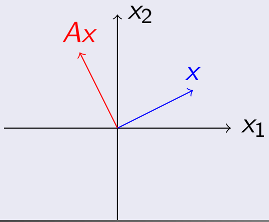
Beispiel

- Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um 90° (gegen den Uhrzeigersinn). Für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt nämlich

$$f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

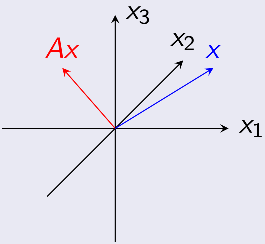


Beispiel

- Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hingegen beschreibt eine Spiegelung eines Vektors an der x_2-x_3-Ebene:



Rechenregeln

1. $(A \cdot B)C = A \cdot (B \cdot C)$ *(passende Größen) (Assoziativ)*
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(passende Größen) (Distributiv)*
3. *Im Allgemeinen gilt* $A \cdot B \neq B \cdot A$.
   Z.B. gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$