Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

29.11.2019

Im Fall $m = n = 1$ reduziert sich ein LGS $(A|b)$ auf die Gleichung

$$a \cdot x = b.$$

Falls $a \neq 0$, wird die Gleichung von

$$x = \frac{1}{a} b = a^{-1} b$$

gelöst.
Finden wir im Fall $m \neq 1$ oder $n \neq 1$ eine Matrix A^{-1}, sodass

$$x = A^{-1} b?$$

Dies führt zu dem Begriff der inversen Matrix.

Definition

1. Mit
$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
bezeichnen wir die *Einheitsmatrix der Größe n*.
2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$ gelten. B heißt dann *inverse Matrix* zu A und wir schreiben $B = A^{-1}$.

Bemerkung

- Für $A \in R^{n \times n}$ gilt immer $A \cdot E_n = A = E_n A$.
- Ist eine Matrix invertierbar, so ist ihre Inverse eindeutig bestimmt.
- Die Inverse von E_n ist E_n.
- Man braucht nur $A \cdot B = E_n$ *oder* $B \cdot A = E_n$ zu zeigen; die andere Gleichung folgt dann automatisch.
- Sind $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch $A \cdot C$ invertierbar mit
$$(A \cdot C)^{-1} = C^{-1} A^{-1}.$$

Beispiel

- Die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um 90°) ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um -90°), denn

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

- Die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung an der x_2-x_3-Ebene) ist die Matrix selbst, denn

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

Satz

1. *Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das zugehörige LGS* $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *nur die Lösung* $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *hat.*
2. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so hat jedes LGS der Form $Ax = b$ (bzw. $(A|b)$) genau eine Lösung! Diese ist gegeben durch $x = A^{-1}b$, also indem man die inverse Matrix von A auf b anwendet.*

Bemerkung

1. Ein homogenes LGS hat genau dann mehr als eine Lösung, wenn die Matrix *nicht* invertierbar ist.
2. Schaubild:

$$\begin{tikzcd} \text{Unbekannte } x_1, \ldots, x_n \arrow[r, bend right, "A"'] & \text{Koeffizienten } b_1, \ldots, b_n \arrow[l, bend right, "A^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Frage

1. Wann existiert eine Inverse?
2. Falls eine existiert, wie berechnet man sie?

Wir können elementare Zeilenumformungen durch invertierbare Matrizen darstellen.

Beispiel

Betrachte eine 3×3-Matrix.

1. Vertauschung von Zeile 1 und 3 entspricht der Multiplikation von links mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Die Operation $II \to (-3) \cdot II$ kann durch eine Multiplikation von links mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.
3. Die Operation $II \to II + I$ kann durch eine Multiplikation von links mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Beispiel

Die elem. Zeilenumformung $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

entspricht der Äquivalenzumformung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verfahren

1. *Schreibe*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & & 1 \end{array}\right) \qquad ((A|E_n)).$$

2. *Führe den Gaußalgorithmus aus, sodass wir*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & * & * & * & * \\ & \ddots & & * & * & * \\ 0 & & d_n & * & * & * \end{array}\right)$$

erhalten. Hierbei werden die Zeilenumformungen auch auf der rechten Seite einfach mitausgeführt. Die Matrix auf der linken Seite hat jetzt die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix.

Verfahren

3. *Ist ein $d_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist A nicht invertierbar. Andernfalls: Fahre mit Zeilenumformungen fort bis wir*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{array}\right) \qquad ((E_n|B))$$

erhalten. Die Matrix B auf der rechten Seite ist dann die inverse Matrix zu A.

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III\to III+I]{II\to 3II-2I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Da $-3, -2$ und 2 verschieden von 0 sind, ist die Matrix A auf der linken Seiten invertierbar.)

$$\xrightarrow[II\to II-III]{I\to I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I\to 2I+II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel

$$\xrightarrow[III\to\frac{1}{2}III]{\substack{I\to\left(-\frac{1}{6}\right)I\\ II\to\left(-\frac{1}{2}\right)II}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Auf der rechten Seite steht nun A^{-1}.

Frage

Gibt es noch weitere Möglichkeiten die Invertierbarkeit einer Matrix zu überprüfen?

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$ax = 0$$

mit dem Koeffizient $a \in \mathbb{R}$ und der Variable $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die (1×1)-Matrix $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ genau dann invertierbar, d.h. das LGS hat eine eindeutige Lösung, wenn $a \neq 0$.

Definition

Wir definieren für eine (1×1)-Matrix $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$\det(A) = a$$

und nennen $\det(A)$ die *Determinante von A*.

Erinnerung

Unter einer elementaren Zeilenumformung haben wir die drei folgenden Operationen verstanden.

- Vertauschen zweier Zeilen.
- Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0.
- Addieren eines Vielfachen einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + cx_2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und Variablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a \neq 0$: Wir führen den Gaußalgorithmus aus:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - \frac{c}{a} I} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{d \cdot a - c \cdot b}{a} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass die Matrix genau dann invertierbar ist, wenn $a \neq 0$ und $\frac{d \cdot a - c \cdot b}{a} \neq 0$ gilt. Die letzte Bedingung lässt sich zu $a \cdot \frac{d \cdot a - c \cdot b}{a} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ zusammenfassen.

- $a = 0$: Wir machen eine weitere Fallunterscheidung:
  - $c = 0$: In diesem Fall können wir $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen, d.h. die Matrix ist nicht invertierbar.
  - $c \neq 0$: Wir tauschen die erste und zweite Zeile und führen wieder den Gaußalgorithmus aus:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - \frac{a}{c} I} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -\frac{a \cdot d - b \cdot c}{c} \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also, dass die Matrix genau dann invertierbar ist, wenn

$$c \cdot \left(-\frac{a \cdot d - b \cdot c}{c}\right) = -(a \cdot d - b \cdot c) \neq 0$$

gilt.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine (2×2)-Matrix.

Definition

Wir definieren

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

und nennen $\det(A)$ die *Determinante von A*.

Satz

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $e, f \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\det\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}\right)$
   und
   $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}\right)$.

Satz

2. $\det\left(\begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \alpha \det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{pmatrix}\right)$, *d.h., wenn wir eine Zeile mit α multiplizieren, so ändert sich die Determinante um α.*
3. $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -\det\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right)$, *d.h., wenn wir zwei Zeilen vertauschen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.*
4. $\det(E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.$
5. *Die Operationen $I \to I + \alpha II$ und $II \to II + \alpha I$ lassen die Determinante unverändert.*

Satz

6. *Ist* $c = 0$, *so gilt* $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = a \cdot d$, *d.h. die Determinante ist das Produkt der Diagonaleinträge bei einer oberen Dreiecksmatrix.*
7. A *ist genau dann invertierbar, wenn* $\det(A) \neq 0$.

Wir wissen also nun wie sich die Determinante bei elementaren Zeilenumformungen (und damit beim Gaußalgorithmus) verhält.

Beispiel

Ist das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar? Ja, denn

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 2 - 12 = -10 \neq 0.$$

Da es sich um ein homogenes LGS handelt, gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um uns eine Determinante für (3×3)-Matrizen zu überlegen, führen wir den Gaußalgorithmus aus, wobei wir zur Einfachheit annehmen, dass wir immer teilen dürfen.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow[III \to III - \frac{g}{a} I]{II \to II - \frac{d}{a} I} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ea-db}{a} & \frac{fa-dc}{a} \\ 0 & \frac{ha-gb}{a} & \frac{ia-gc}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \to III - \frac{ha-gb}{ea-db} II} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ea-db}{a} & \frac{fa-dc}{a} \\ 0 & 0 & \frac{a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b}{ea-db} \end{pmatrix}.$$

Definition

Wir definieren

$$\det(A) = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

Diese Definition erfüllt die analogen Aussagen aus dem Satz von den Folien 18-20. Wie kann man sich diese Formel merken?

Satz (Regel von Sarrus)

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$\det(A) = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

Achtung: Die Regel von Sarrus gilt nur(!) für (3×3)-Matrizen!

Beispiel

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\
6 & -1 & 0 & 6 & -1 \\
0 & 2 & 4 & 0 & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) =& 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 6 \cdot 2 \\
& - 0 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 6 \cdot 3 \\
=& -4 + 36 - 72 = -40
\end{aligned}
$$

Frage

Gibt es auch eine Determinante für $(n \times n)$-Matrizen für $n \geq 4$?

Antwort

Ja, es gibt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ eine eindeutige(!) Abbildung $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, sodass die Bedingungen 1-4 aus dem Satz von Folien 18-20 erfüllt sind. Die Eigenschaften 5-7 folgen daraus.